SÉSAMATH

Le Manuel 3e

avec ses compléments numériques

L'essentiel des propriétés utiles aux démonstrations

Génération 5

http://www.sesamath.net/

http://manuel.sesamath.net/

Vers Table des matières

Sésamath Troisième
L'essentiel des propriétés utiles aux démonstrations

Association Sésamath

Illustrations des têtes de chapitre
http://www.bidulz.com/index.htm

Adaptation réalisée par Marie-Laure Besson

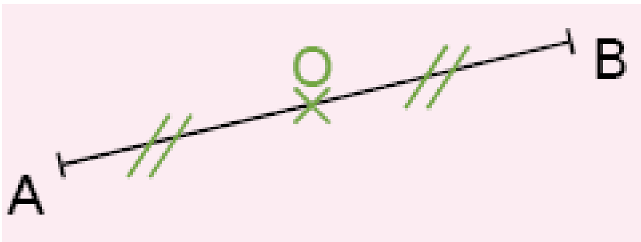
Table des matières

Vers Table des matières

Démontrer qu'un point est le milieu d'un segment

Propriété 1

Si un point est sur un segment et à égale distance de ses extrémités alors ce point est le milieu du segment.



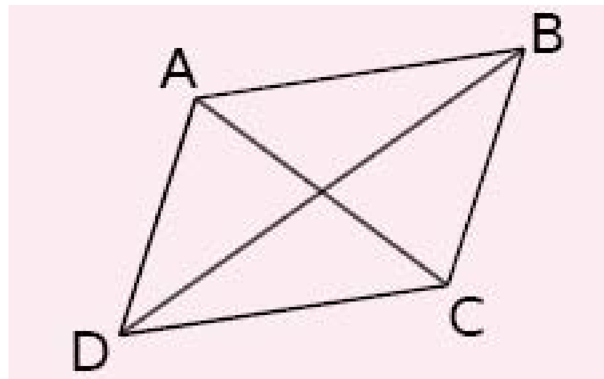
O appartient à [AB] et OA = OB donc O est le milieu de [AB].

Vers Table des matières

Propriété 2

Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales se coupent en leur milieu.

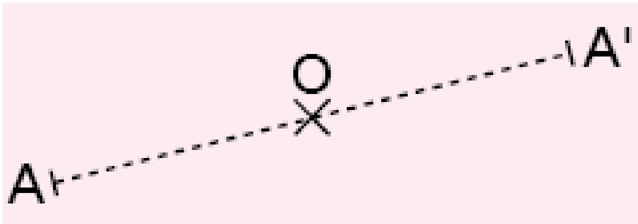
(Ceci est aussi vrai pour les losanges, rectangles et carrés qui sont des parallélogrammes particuliers.)



ABCD est un parallélogramme donc ses diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu.

Propriété 3

Si A et A’ sont symétriques par rapport à un point O alors O est le milieu du segment [AA’].

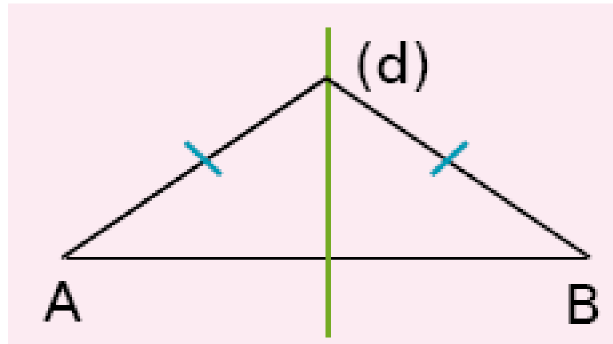


A et A’ sont symétriques par rapport au point O donc le point O est le milieu de [AA’].

Vers Table des matières

Propriété 4

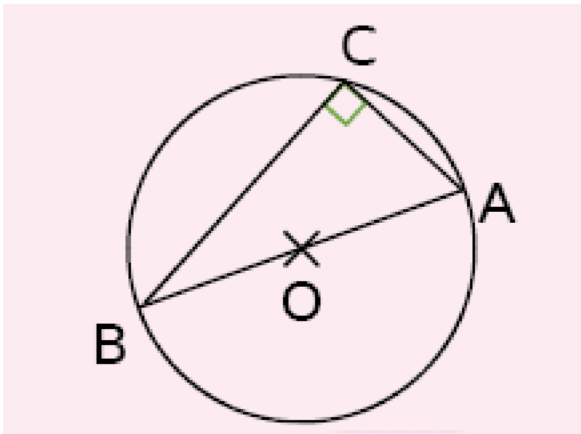
Si une droite est la médiatrice d’un segment alors elle coupe ce segment en son milieu.



(d) est la médiatrice du segment [AB] donc (d) coupe le segment [AB] en son milieu.

Propriété 5

Si un triangle est rectangle alors son cercle circonscrit a pour centre le milieu de son hypoténuse.

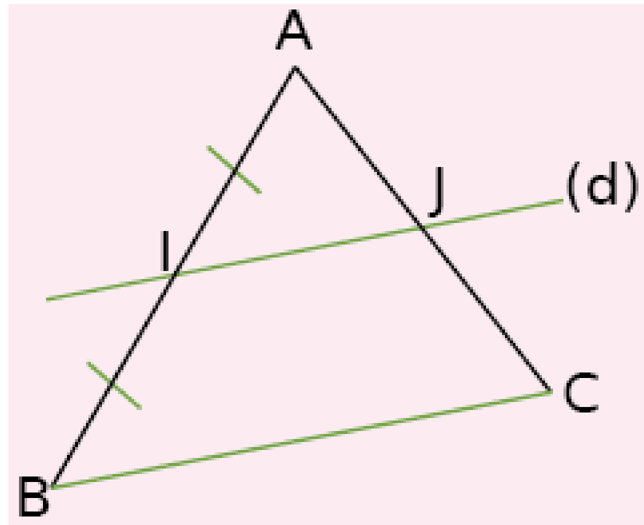


ABC est un triangle rectangle d'hypoténuse [AB] donc le centre de son cercle circonscrit est le milieu de [AB].

Vers Table des matières

Propriété 6

Si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté alors elle passe par le milieu du troisième côté.



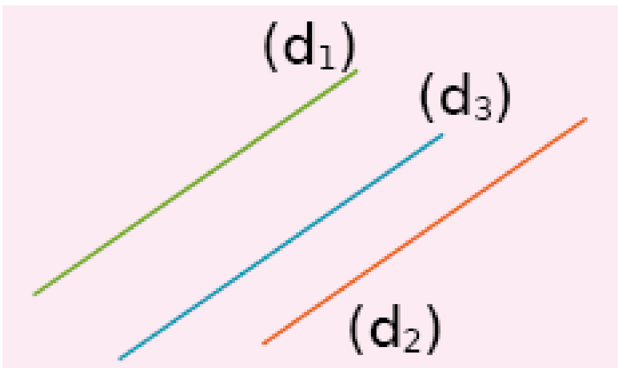
Dans le triangle ABC, I est le milieu de [AB] et la parallèle (d) à (BC) coupe [AC] en J donc J est le milieu de [AC].

Vers Table des matières

Démontrer que deux droites sont parallèles

Propriété 7

Si deux droites sont parallèles à une même troisième droite alors elles sont parallèles entre elles.

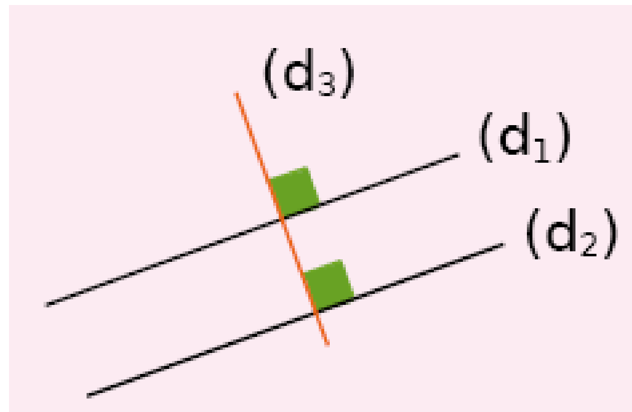


(d_1) // (d_2) et (d_2) // (d_3) donc (d_1) // (d_3).

Vers Table des matières

Propriété 8

Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième droite alors elles sont parallèles entre elles.

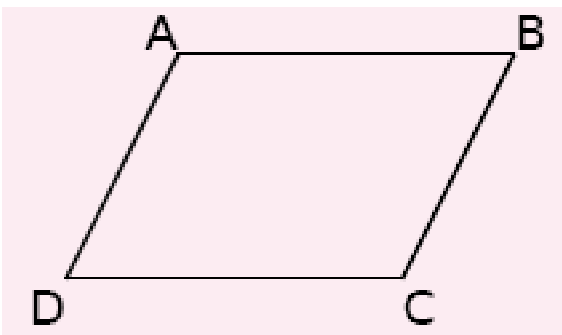


$(d_1) \perp (d_3)$ et $(d_2) \perp (d_3)$ donc (d_1) // (d_2).

Propriété 9

Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont parallèles.

(Ceci est aussi vrai pour les losanges, rectangles et carrés qui sont des parallélogrammes particuliers.)



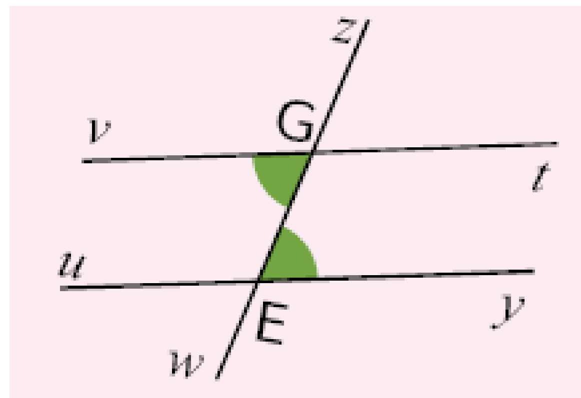
ABCD est un parallélogramme donc

(AB) // (CD) et (AD) // (BC).

Vers Table des matières

Propriété 10

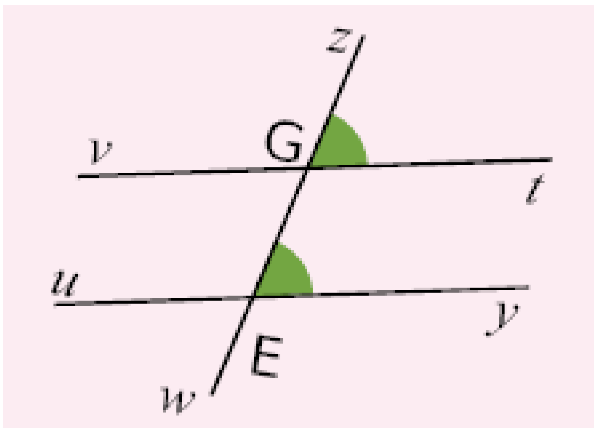
Si deux droites coupées par une sécante forment des angles alternes-internes de même mesure alors ces droites sont parallèles.



Les droites (vt) et (uy) sont coupées par la sécante (zw), $\widehat{vGw}$ et $\widehat{zEy}$ sont alternes-internes et de même mesure donc (vt) // (uy).

Propriété 11

Si deux droites coupées par une sécante forment des angles correspondants de même mesure alors ces droites sont parallèles.

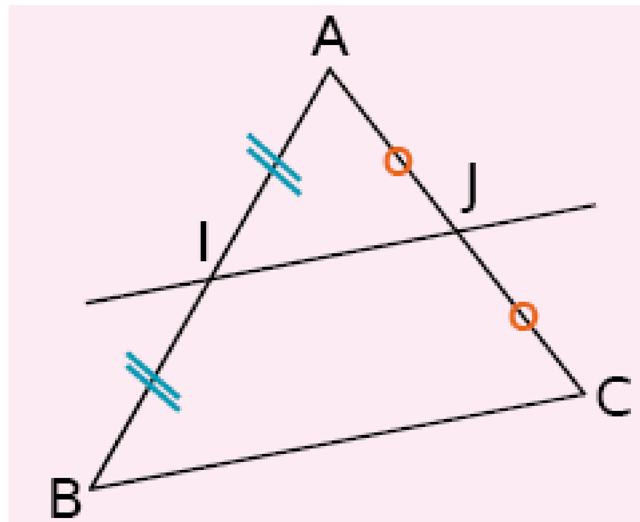


Les droites (vt) et (uy) sont coupées par la sécante (zw), $\widehat{zGt}$ et $\widehat{zEy}$ sont correspondants et de même mesure donc (vt) // (uy)

Vers Table des matières

Propriété 12

Si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés alors elle est parallèle au troisième côté.

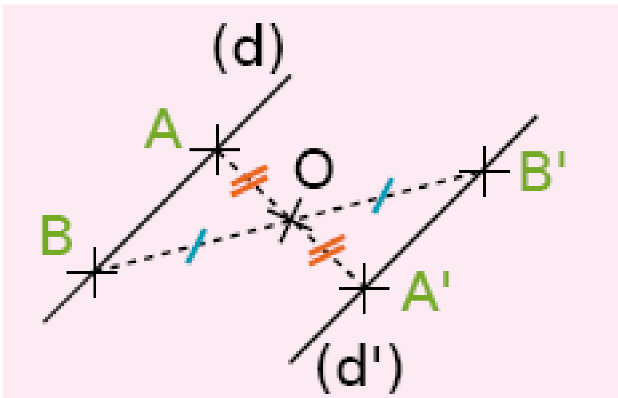


Dans le triangle ABC, I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [AC] donc

(IJ) est parallèle à (BC).

Propriété 13

Si deux droites sont symétriques par rapport à un point alors elles sont parallèles.



Les droites (d) et (d’) sont symétriques par rapport au point O donc (d) // (d’).

Vers Table des matières

Propriété 14

Réciproque du théorème de Thalès :

Soient (d) et (d’) deux droites sécantes en A.

B et M sont deux points de (d) distincts de A.

C et N sont deux points de (d’) distincts de A.

Si les points A, B, M d’une part et les points A, C, N d’autre part sont alignés dans le même ordre et si

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

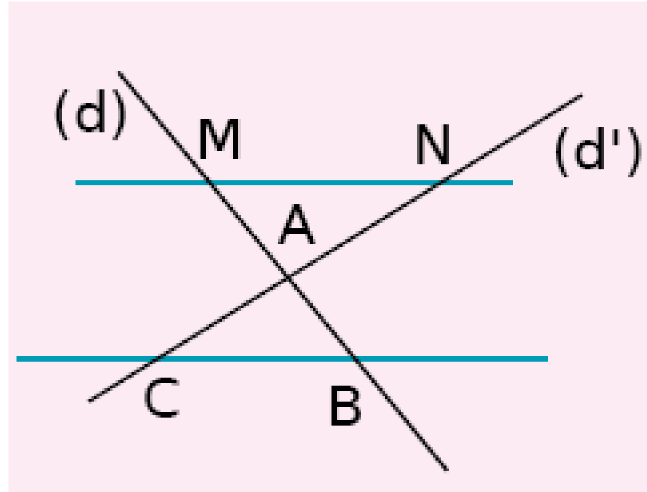
alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Les points M, A, B d'une part et les points N, A, C d'autre part sont alignés dans le même ordre.

Si, de plus,

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

alors, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (MN) et (BC) sont parallèles.



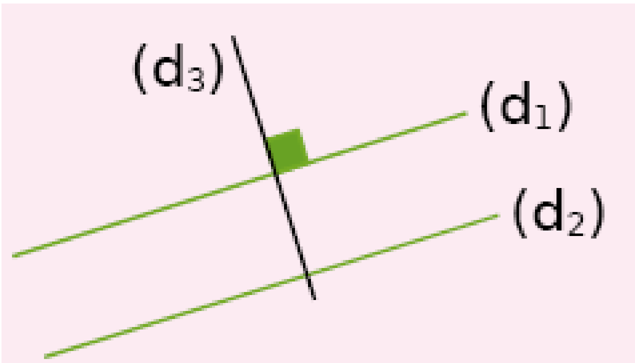
Vers Table des matières

Vers Table des matières

Démontrer que deux droites sont perpendiculaires

Propriété 15

Si deux droites sont parallèles et si une troisième droite est perpendiculaire à l'une alors elle est perpendiculaire à l'autre.



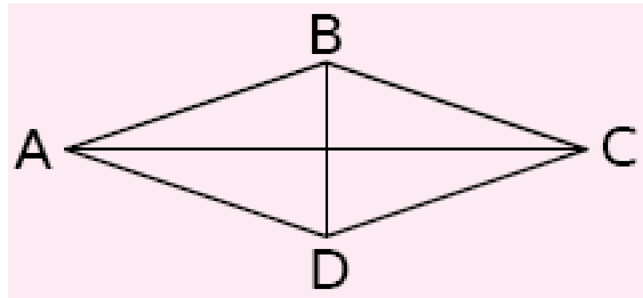
$(d_1) \perp (d_3)$ et $(d_1) // (d_2)$ donc $(d_2) \perp (d_3)$.

Vers Table des matières

Propriété 16

Si un quadrilatère est un losange alors ses diagonales sont perpendiculaires.

(Ceci est aussi vrai pour le carré qui est un losange particulier.)

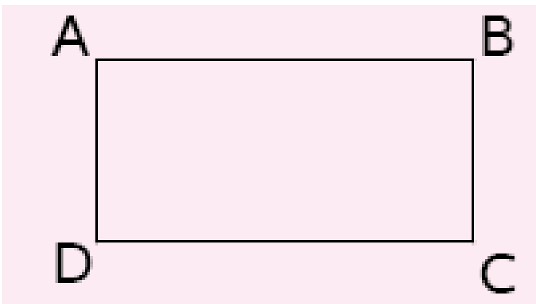


ABCD est un losange donc $(AC) \perp (BD)$.

Propriété 17

Si un quadrilatère est un rectangle alors ses côtés consécutifs sont perpendiculaires.

(Ceci est aussi vrai pour le carré qui est un rectangle particulier.)



ABCD est un rectangle donc

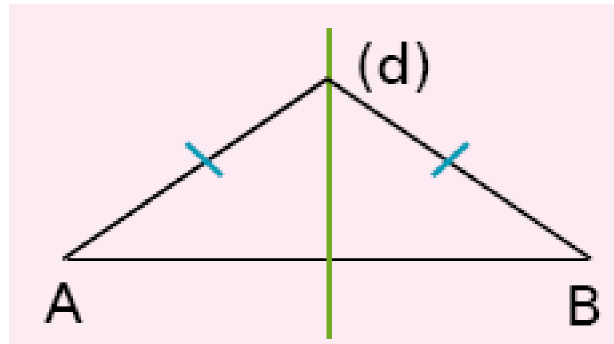
(AB) ⊥ (BC), (BC) ⊥ (CD),

(CD) ⊥ (AD) et (AD) ⊥ (AB).

Vers Table des matières

Propriété 18

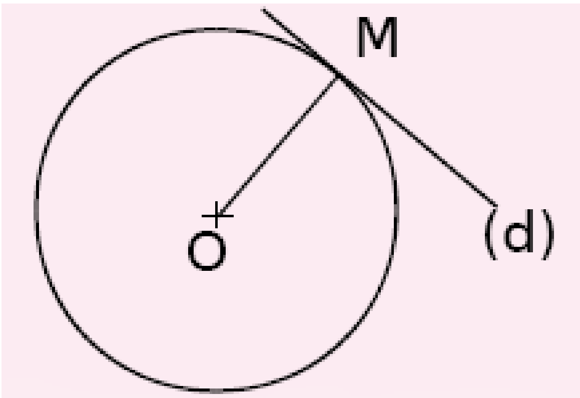
Si une droite est la médiatrice d'un segment alors elle est perpendiculaire à ce segment.



(d) est la médiatrice du segment [AB] donc (d) est perpendiculaire à [AB].

Propriété 19

Si une droite est tangente à un cercle en un point alors elle est perpendiculaire au rayon de ce cercle qui a pour extrémité ce point.



(d) est tangente en M au cercle de centre O donc (d) est perpendiculaire à [OM].

Vers Table des matières

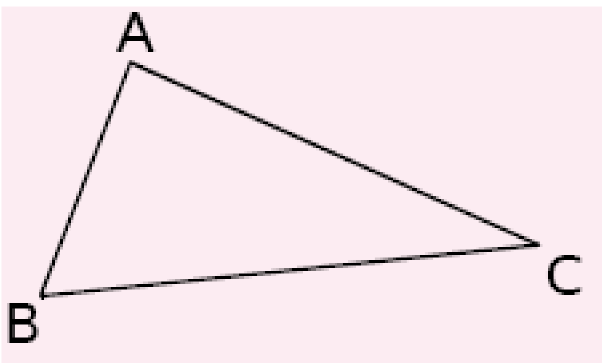
Démontrer qu'un triangle est rectangle

Vers Table des matières

Propriété 20

Réciproque du théorème de Pythagore :

Si, dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés alors le triangle est rectangle et il admet ce plus grand côté pour hypoténuse.



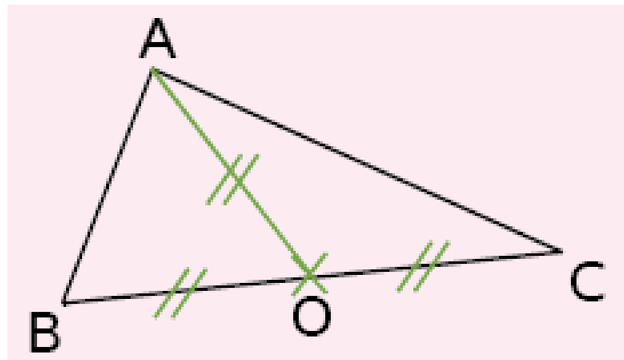
Dans le triangle ABC, $BC^2 = AB^2 + AC^2$

donc le triangle ABC est rectangle en A.

Vers Table des matières

Propriété 21

Si, dans un triangle, la longueur de la médiane relative à un côté est égale à la moitié de la longueur de ce côté alors ce triangle est rectangle et il admet ce côté pour hypoténuse.



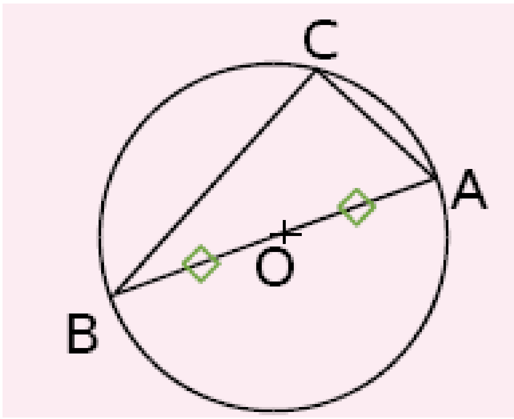
Dans le triangle ABC, O est le milieu de [BC] et

$$OA = \frac{BC}{2}$$

donc le triangle ABC est rectangle en A.

Propriété 22

Si un triangle est inscrit dans un cercle de diamètre l'un de ses côtés alors il est rectangle et il admet ce diamètre pour hypoténuse.



C appartient au cercle de diamètre [AB] donc

ABC est un triangle rectangle en C.

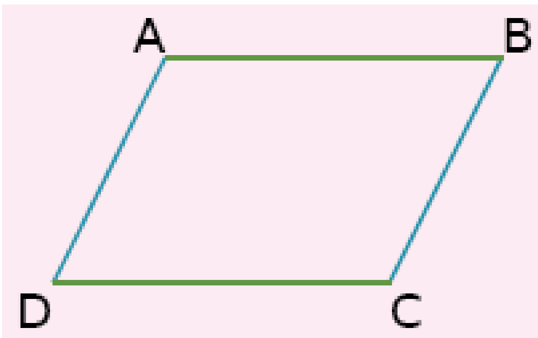
Vers Table des matières

Vers Table des matières

Démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme

Propriété 23

Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles deux à deux alors c'est un parallélogramme.



Dans le quadrilatère ABCD, (AB) // (CD) et

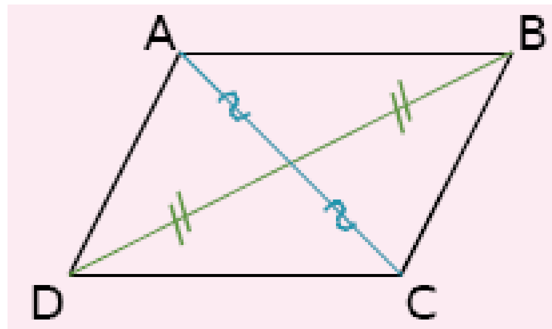
(AD) // (BC) donc

ABCD est un parallélogramme.

Vers Table des matières

Propriété 24

Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu alors c'est un parallélogramme.

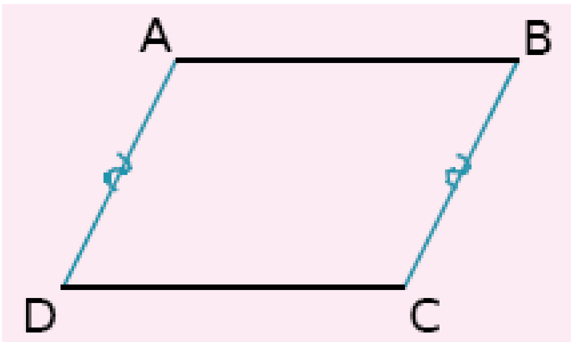


Dans le quadrilatère ABCD, les diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu.

Donc ABCD est un parallélogramme.

Propriété 25

Si un quadrilatère non croisé a deux côtés opposés parallèles et de même longueur alors c'est un parallélogramme.



Dans le quadrilatère non croisé ABCD,

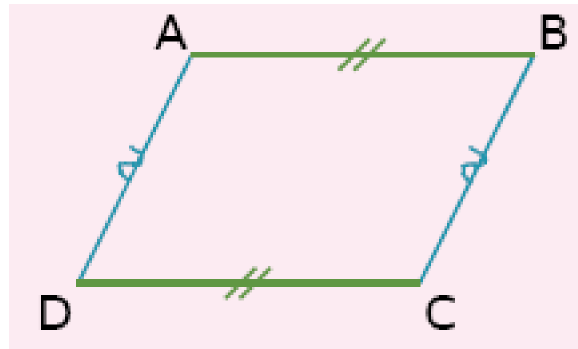
(AD) // (BC) et AD = BC donc

ABCD est un parallélogramme.

Vers Table des matières

Propriété 26

Si un quadrilatère non croisé a ses côtés opposés de la même longueur deux à deux alors c'est un parallélogramme.



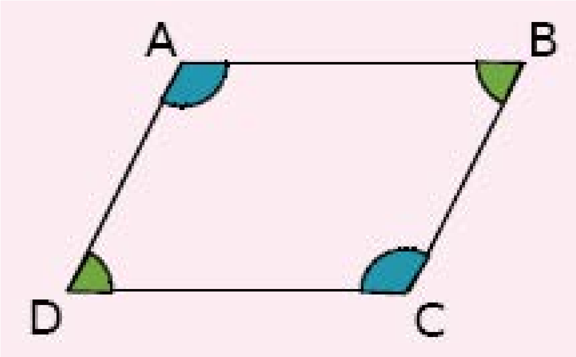
Dans le quadrilatère non croisé ABCD,

AB = CD et AD = BC donc

ABCD est un parallélogramme.

Propriété 27

Si un quadrilatère non croisé a ses angles opposés de la même mesure alors c'est un parallélogramme.

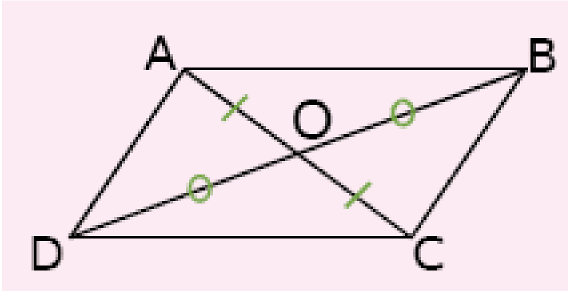


Dans le quadrilatère non croisé ABCD, $\widehat{A} = \widehat{C}$ et $\widehat{B} = \widehat{D}$ donc ABCD est un parallélogramme.

Vers Table des matières

Propriété 28

Si un quadrilatère non croisé a un centre de symétrie alors c'est un parallélogramme.



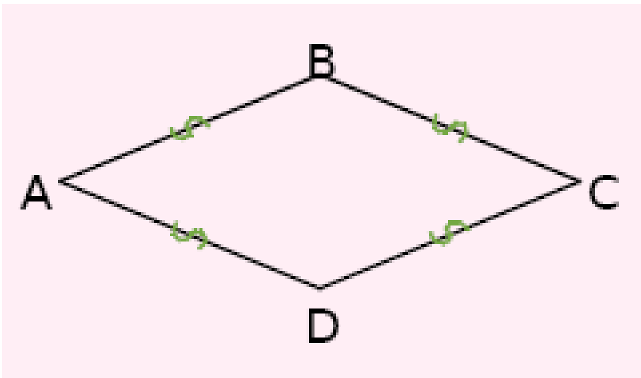
O est centre de symétrie du quadrilatère ABCD donc ABCD est un parallélogramme.

Vers Table des matières

Démontrer qu’un quadrilatère est un losange

Propriété 29

Si un quadrilatère a ses côtés de la même longueur alors c’est un losange.



Dans le quadrilatère ABCD,

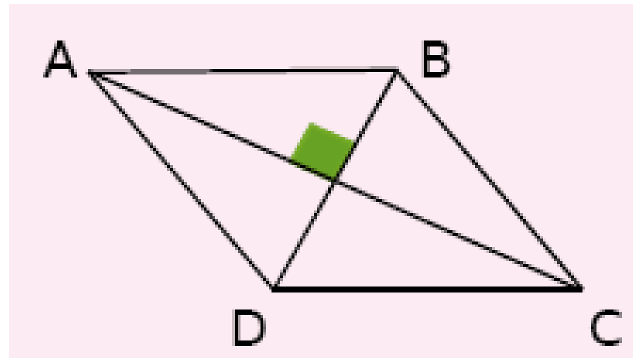
AB = BC = CD = DA

donc ABCD est un losange.

Vers Table des matières

Propriété 30

Si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires alors c’est un losange.



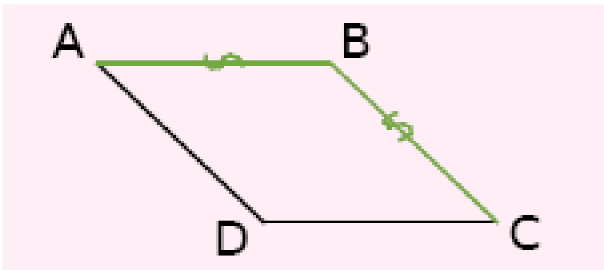
ABCD est un parallélogramme et (AC) ⊥ (BD)

donc ABCD est un losange.

Propriété 31

Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs

de la même longueur alors c’est un losange.



ABCD est un parallélogramme et AB = BC

donc ABCD est un losange.

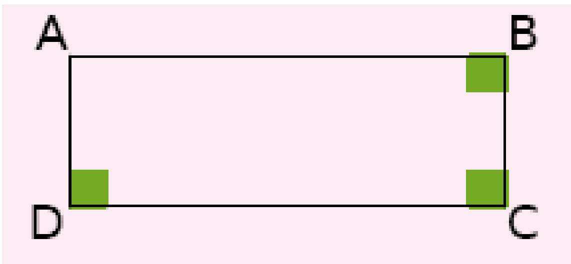
Vers Table des matières

Vers Table des matières

Démontrer qu’un quadrilatère est un rectangle

Propriété 32

Si un quadrilatère possède trois angles droits alors c’est un rectangle.



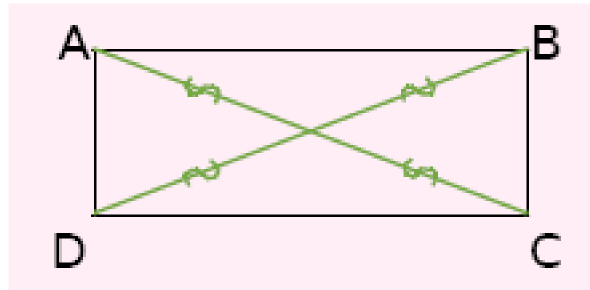
ABCD possède trois angles droits

donc ABCD est un rectangle.

Vers Table des matières

Propriété 33

Si un parallélogramme a ses diagonales de la même longueur alors c’est un rectangle.



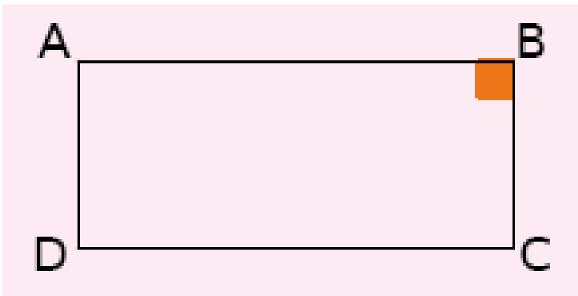
ABCD est un parallélogramme et AC = BD

donc ABCD est un rectangle.

Propriété 34

Si un parallélogramme possède un angle droit

alors c'est un rectangle.



ABCD est un parallélogramme et (AB) ⊥ (BC)

donc ABCD est un rectangle.

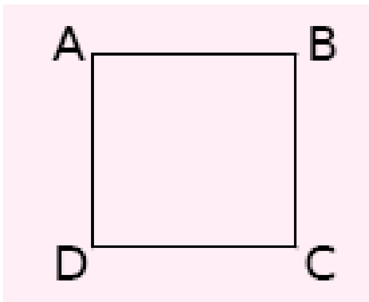
Vers Table des matières

Vers Table des matières

Démontrer qu'un quadrilatère est un carré

Propriété 35

Si un quadrilatère vérifie à la fois les propriétés du losange et du rectangle alors c’est un carré.

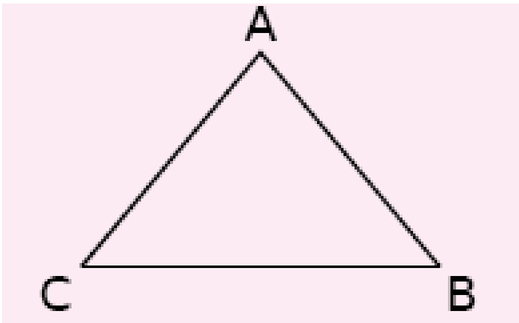


Vers Table des matières

Déterminer la longueur d'un segment

Propriété 36

Si un triangle est isocèle alors il a deux côtés de la même longueur.

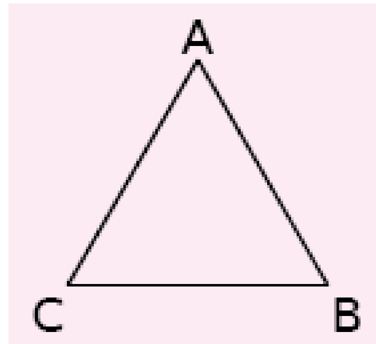


ABC est isocèle en A donc AB = AC.

Vers Table des matières

Propriété 37

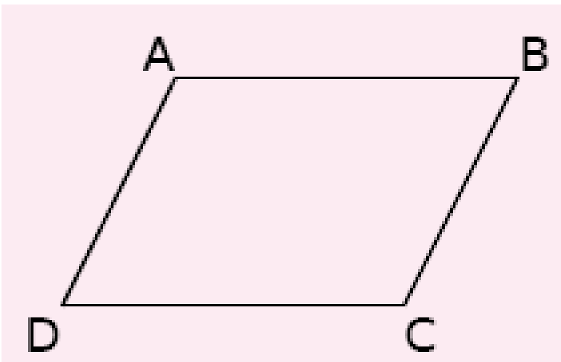
Si un triangle est équilatéral alors il a tous ses côtés de la même longueur.



ABC est équilatéral donc AB = AC = BC.

Propriété 38

Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés ont la même longueur. (C'est également vrai pour les rectangles, les losanges et les carrés qui sont des parallélogrammes particuliers.)



ABCD est un parallélogramme donc

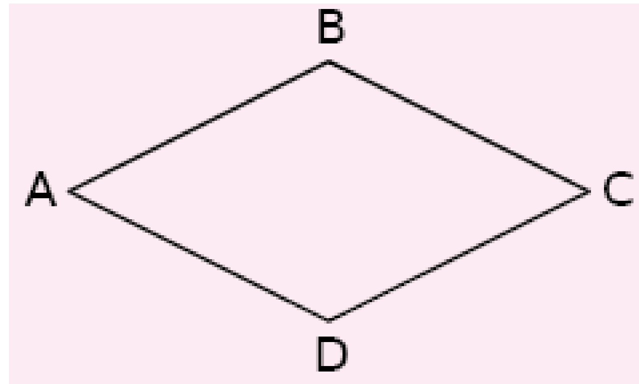
AB = CD et AD = BC.

Vers Table des matières

Propriété 39

Si un quadrilatère est un losange alors tous ses côtés sont de la même longueur.

(C'est également vrai pour les carrés qui sont des losanges particuliers.)



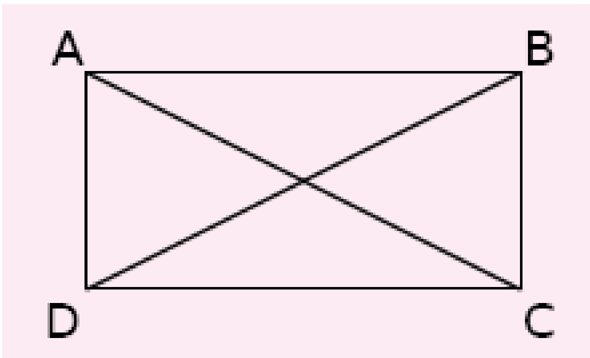
ABCD est un losange donc

AB = BC = CD = DA.

Propriété 40

Si un quadrilatère est un rectangle alors ses diagonales ont la même longueur.

(C'est également vrai pour les carrés qui sont des rectangles particuliers.)

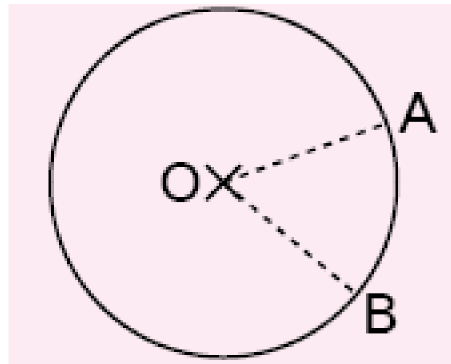


ABCD est un rectangle donc AC = BD.

Vers Table des matières

Propriété 41

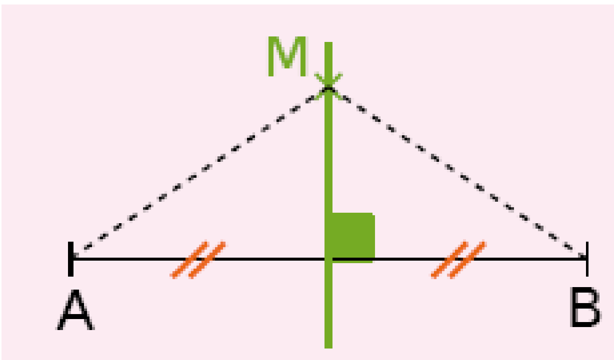
Si deux points appartiennent à un cercle alors ils sont équidistants du centre de ce cercle.



A et B appartiennent au cercle de centre O donc OA = OB.

Propriété 42

Si un point appartient à la médiatrice d'un segment alors il est équidistant des extrémités de ce segment.



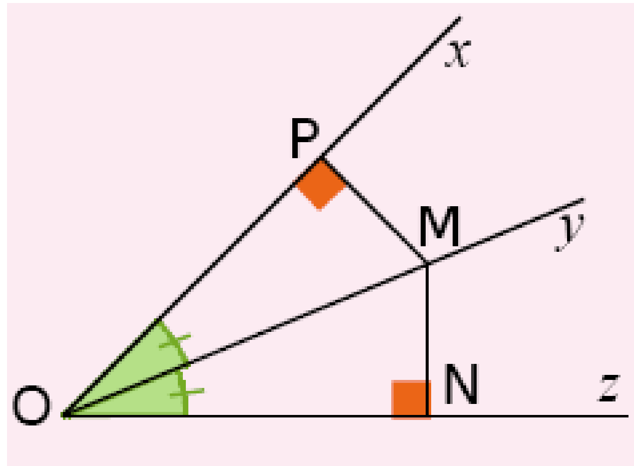
M appartient à la médiatrice de [AB] donc

MA = MB.

Vers Table des matières

Propriété 43

Si un point appartient à la bissectrice d'un angle alors il est situé à la même distance des côtés de cet angle.

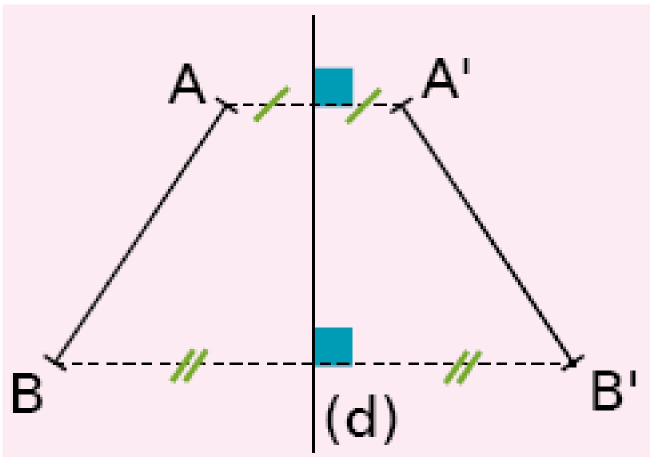


M appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{xOz}$

donc MN = MP.

Propriété 44

Si deux segments sont symétriques par rapport à une droite alors ils ont la même longueur.

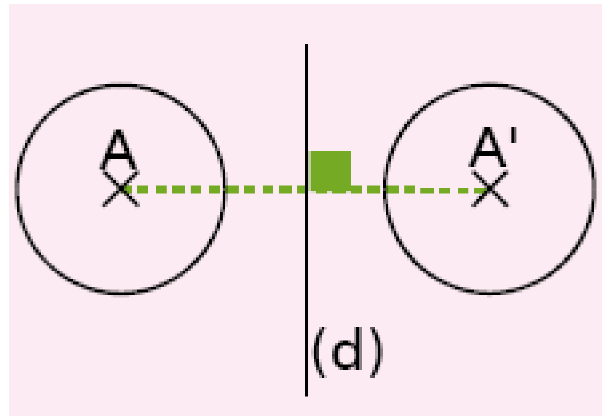


Les segments [AB] et [A'B'] sont symétriques par rapport à l'axe (d) donc AB = A'B'.

Vers Table des matières

Propriété 45

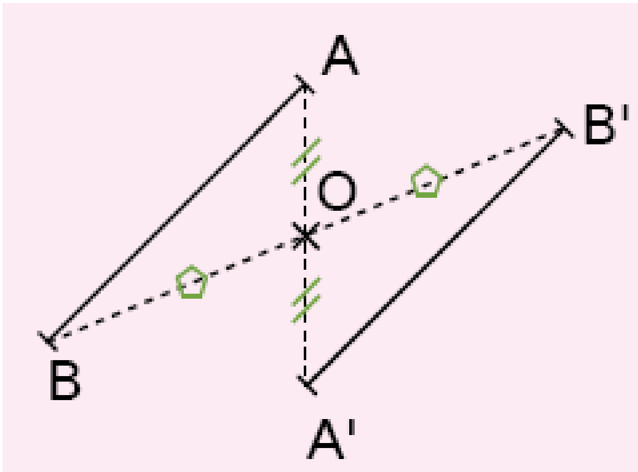
Si un cercle est l'image d'un autre cercle par une symétrie alors ils ont le même rayon.



Les cercles de centres A et A' sont symétriques par rapport à (d) donc ils ont le même rayon.

Propriété 46

Si deux segments sont symétriques par rapport à un point alors ils ont la même longueur.

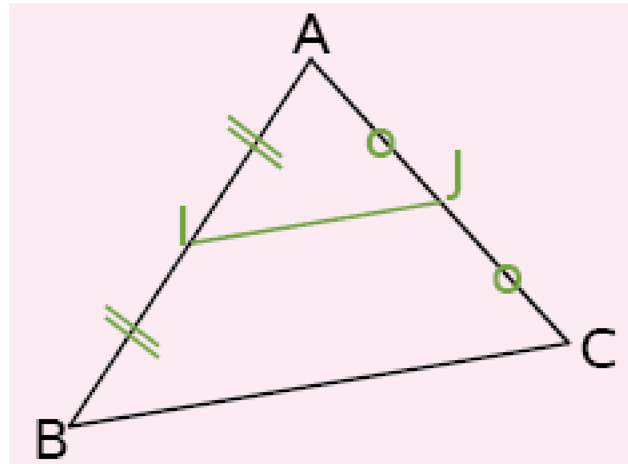


Les segments [AB] et [A’B’] sont symétriques par rapport au point O donc AB = A’B’.

Vers Table des matières

Propriété 47

Si, dans un triangle, un segment joint les milieux de deux côtés alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté.



Dans le triangle ABC, I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [AC] donc

$$IJ = \frac{BC}{2}$$

Propriété 48

Théorème de Thalès

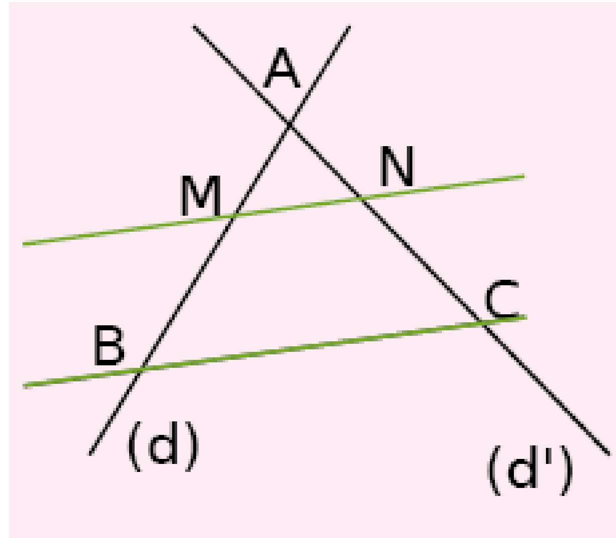
Soient deux droites (d) et (d') sécantes en A.

B et M sont deux points de (d) distincts de A.

C et N sont deux points de (d') distincts de A.

Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles alors

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$



Les droites (BM) et (CN) sont sécantes en A.

(MN) est parallèle à (BC) donc :

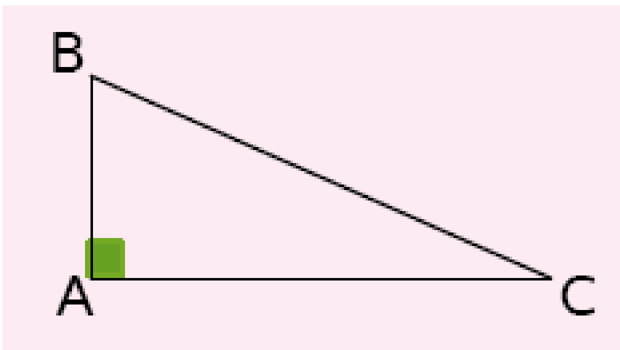
$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

Vers Table des matières

Propriété 49

Théorème de Pythagore :

Si un triangle est rectangle alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.



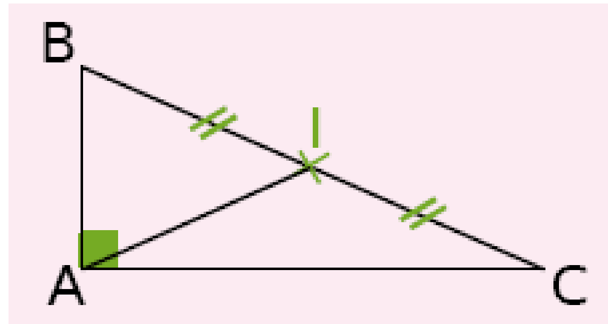
ABC est un triangle rectangle en A donc

$BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Vers Table des matières

Propriété 50

Si un triangle est rectangle alors la longueur de la médiane issue de l'angle droit a pour longueur la moitié de la longueur de l'hypoténuse.



ABC est un triangle rectangle en A et I est le milieu de [BC] donc

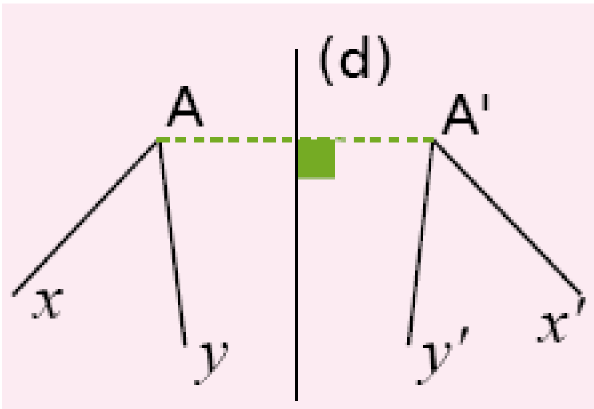
$AI = \dfrac{BC}{2}$

Vers Table des matières

Déterminer la mesure d’un angle

Propriété 51

Si deux angles sont symétriques par rapport à une droite alors ils ont la même mesure.

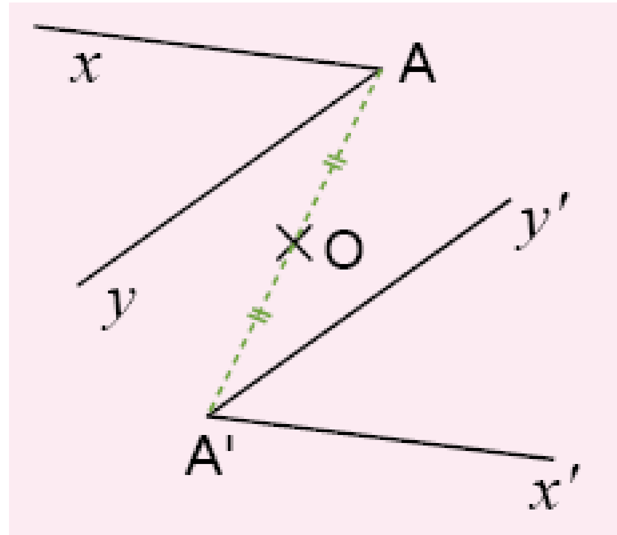


$\widehat{xAy}$ et $\widehat{x'A'y'}$ sont symétriques par rapport à l'axe (d) donc $\widehat{xAy} = \widehat{x'A'y'}$

Vers Table des matières

Propriété 52

Si deux angles sont symétriques par rapport à un point alors ils ont la même mesure.

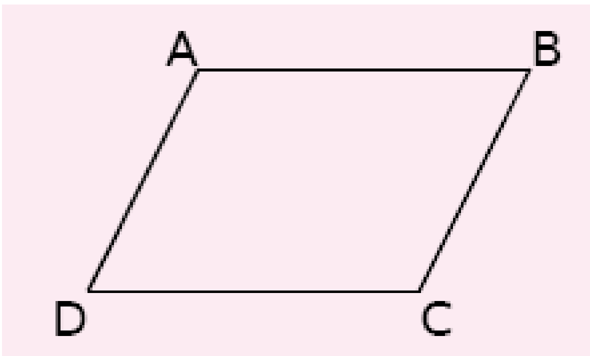


$\widehat{xAy}$ et $\widehat{x'A'y'}$ sont symétriques par rapport au point O donc $\widehat{xAy} = \widehat{x'A'y'}$

Propriété 53

Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses angles opposés ont la même mesure.

(C’est également vrai pour les losanges, les rectangles et les carrés qui sont des parallélogrammes particuliers.)



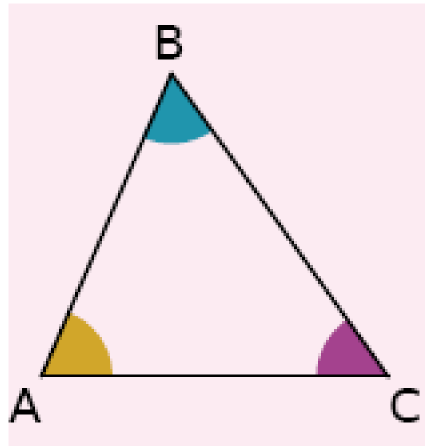
ABCD est un parallélogramme donc

$\widehat{ABC} = \widehat{CDA}$ et $\widehat{DAB} = \widehat{BCD}$

Vers Table des matières

Propriété 54

Dans un triangle, la somme des mesures des angles est égale à 180°.

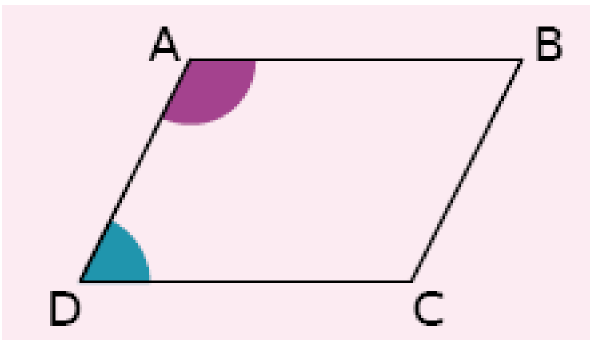


Dans le triangle ABC,

$\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180°$.

Propriété 55

Si un quadrilatère est un parallélogramme alors deux de ses angles consécutifs sont supplémentaires.



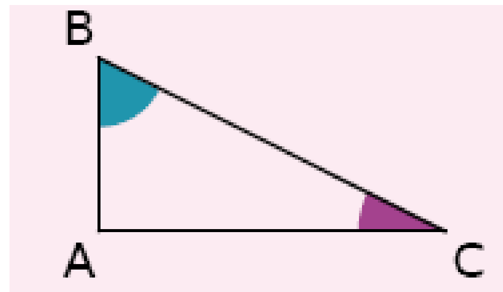
ABCD est un parallélogramme

donc $\widehat{CDA} + \widehat{DAB} = 180°$.

Vers Table des matières

Propriété 56

Si un triangle est rectangle alors ses angles aigus sont complémentaires.

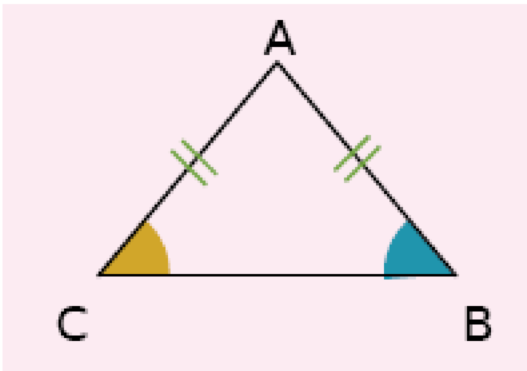


ABC est un triangle rectangle en A

donc $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90°$.

Propriété 57

Si un triangle est isocèle alors ses angles à la base ont la même mesure.



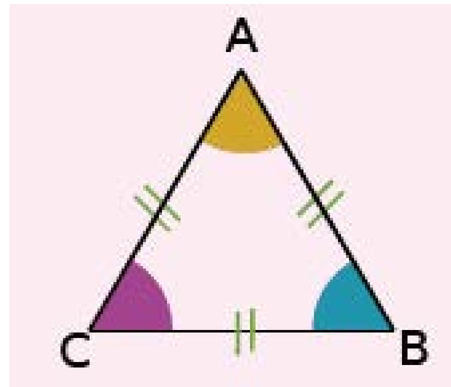
ABC est un triangle isocèle en A donc

$\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$

Vers Table des matières

Propriété 58

Si un triangle est équilatéral alors ses angles mesurent 60°.

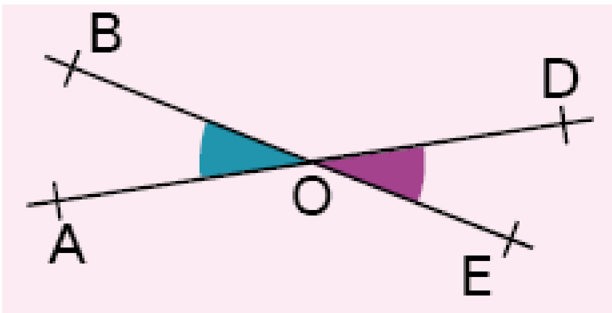


ABC est un triangle équilatéral donc

$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60$ °

Propriété 59

Si deux angles sont opposés par le sommet alors ils ont la même mesure.

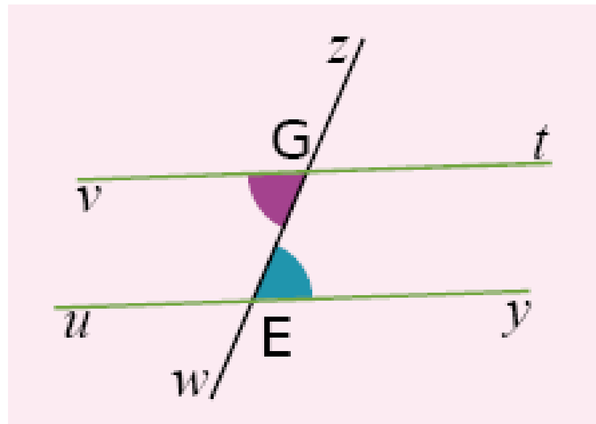


Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{DOE}$ sont opposés par le sommet donc $\widehat{AOB} = \widehat{DOE}$

Vers Table des matières

Propriété 60

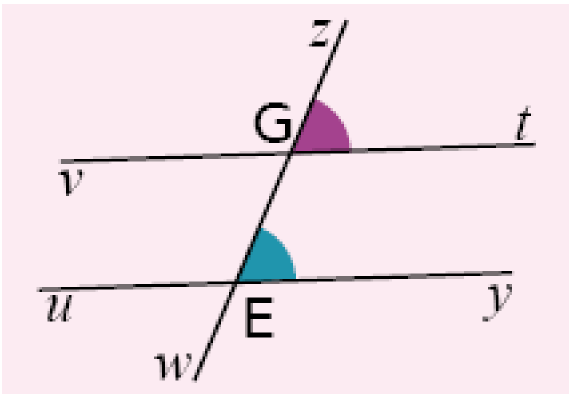
Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante alors les angles alternes-internes qu'elles forment sont de même mesure.



Les angles alternes internes sont déterminés par les droites (vt) et (uy) qui sont parallèles et la sécante (zw) donc $\widehat{vGw} = \widehat{zEy}$

Propriété 61

Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante alors les angles correspondants qu’elles forment sont de même mesure.

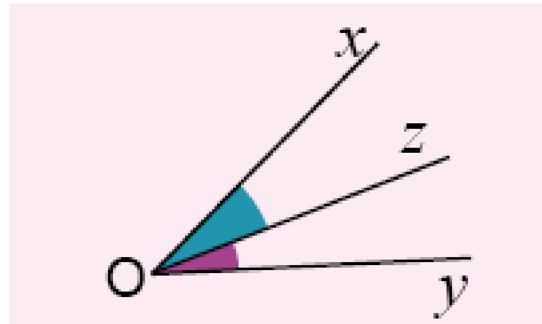


Les angles correspondants sont déterminés par les droites (vt) et (uy) qui sont parallèles et la sécante (zw) donc $\widehat{zGt} = \widehat{zEy}$

Vers Table des matières

Propriété 62

Si une droite est la bissectrice d’un angle alors elle partage l’angle en deux angles adjacents de même mesure.

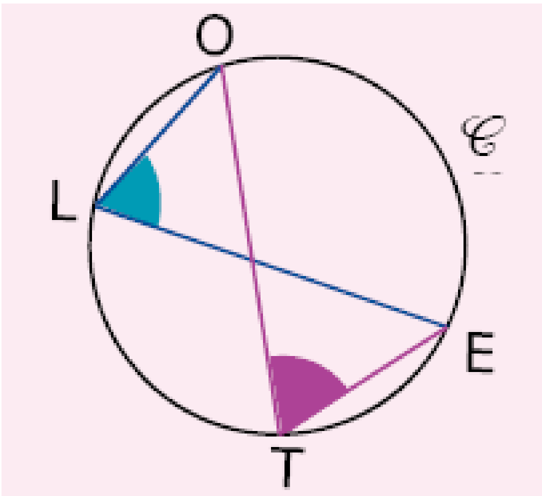


La droite (Oz) est la bissectrice de l’angle $\widehat{xOy}$

donc $\widehat{xOz} = \widehat{zOy}$

Propriété 63

Si deux angles sont inscrits dans un même cercle et s'ils interceptent le même arc de cercle alors ils ont la même mesure.



Les angles $\widehat{OTE}$ et $\widehat{OLE}$ sont inscrits dans le cercle $\mathscr{C}$

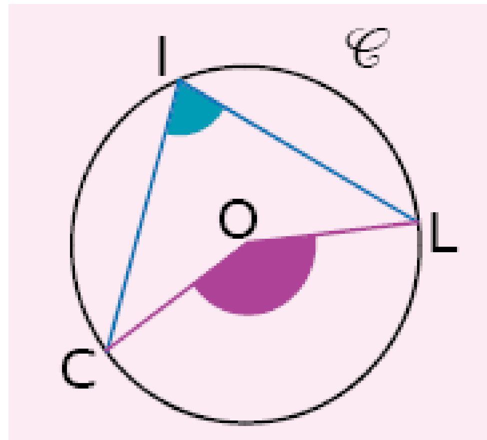
Ils interceptent tous les deux l'arc OE

Donc ils ont la même mesure.

Vers Table des matières

Propriété 64

Si un angle inscrit dans un cercle et un angle au centre interceptent le même arc de cercle, alors l'angle au centre mesure le double de l'angle inscrit.



Dans le cercle $\mathscr{C}$ l'angle inscrit $\widehat{CIL}$ et l'angle au centre $\widehat{COL}$ interceptent le même arc CL.

Donc l'angle au centre $\widehat{COL}$ mesure le double de l'angle inscrit $\widehat{CIL}$.

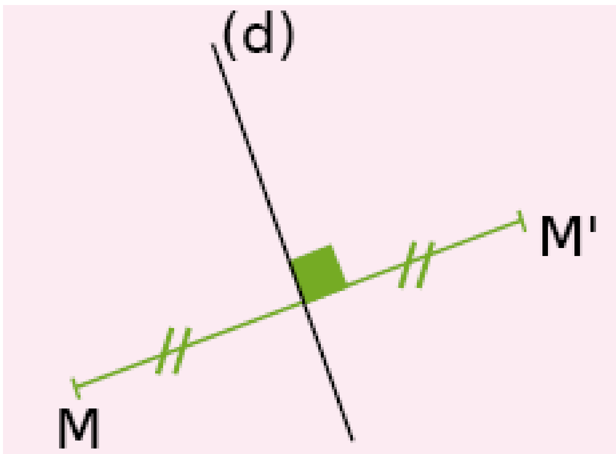
$\widehat{COL} = 2 \times \widehat{CIL}$.

Vers Table des matières

Démontrer avec les droites remarquables du triangle

Propriété 65

Si deux points sont symétriques par rapport à une droite alors cette droite est la médiatrice du segment ayant pour extrémités ces deux points.

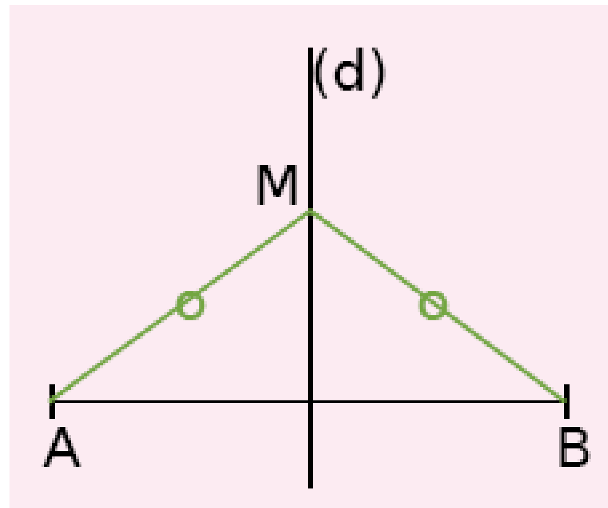


M’ est le symétrique de M par rapport à la droite (d) donc (d) est la médiatrice du segment [MM’].

Vers Table des matières

Propriété 66

Si un point est équidistant des extrémités d’un segment alors il est situé sur la médiatrice de ce segment.

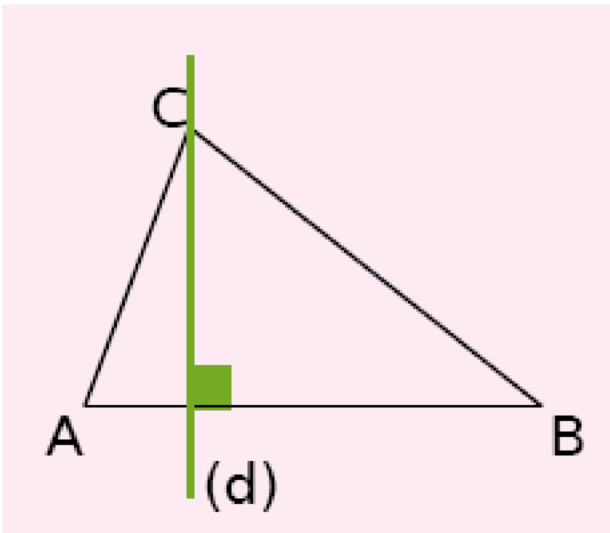


MA = MB donc

M appartient à la médiatrice du segment [AB].

Propriété 67

Si, dans un triangle, une droite passe par un sommet et est perpendiculaire au côté opposé alors c'est une hauteur du triangle.

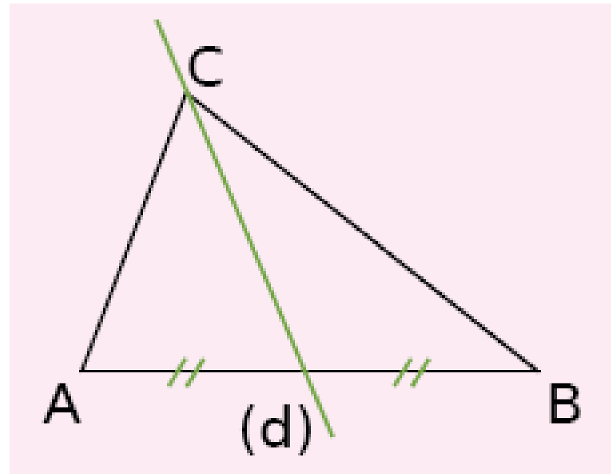


Dans le triangle ABC, (d) passe par le sommet C et est perpendiculaire au côté opposé [AB]

donc (d) est une hauteur du triangle ABC.

Propriété 68

Si, dans un triangle, une droite passe par un sommet et par le milieu du côté opposé alors c'est une médiane du triangle.

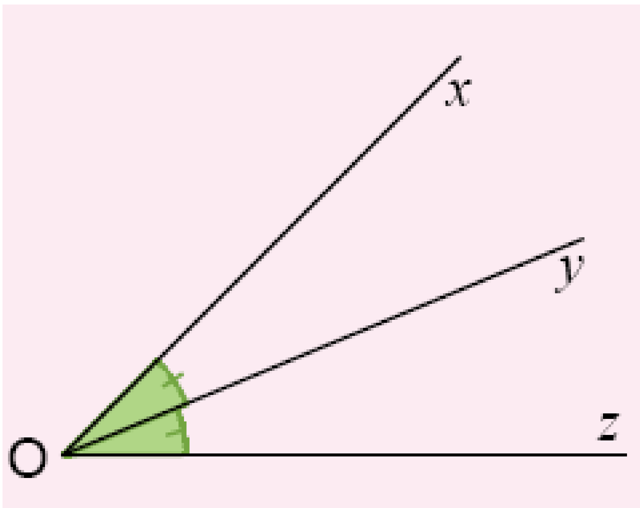


Dans le triangle ABC, (d) passe par le sommet C et par le milieu du côté opposé [AB]

donc (d) est une médiane du triangle ABC.

Propriété 69

Si une droite partage un angle en deux angles égaux alors cette droite est la bissectrice de l'angle.



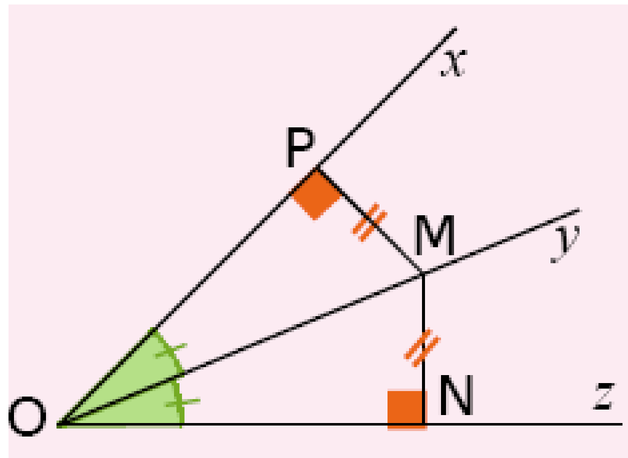
$\widehat{xOy} = \widehat{yOz}$

donc (Oy) est la bissectrice de l'angle $\widehat{xOz}$

Vers Table des matières

Propriété 70

Si un point est situé à la même distance des côtés d'un angle alors il appartient à la bissectrice de cet angle.



MP = MN donc

M appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{xOz}$