MANUEL COLLABORATIF

MATHS 2de

STATISTIQUES PROBABILITÉS • FONCTIONS • GÉOMÉTRIE

L'essentiel des propriétés utiles aux démonstrations

Sésamath

MAGNARD

http://www.sesamath.net/

http://manuel.sesamath.net/

Vers Table des matières

Sésamath Seconde
L'essentiel des propriétés utiles aux démonstrations

Association Sésamath

Illustrations des têtes de chapitre
http://www.bidulz.com/index.htm

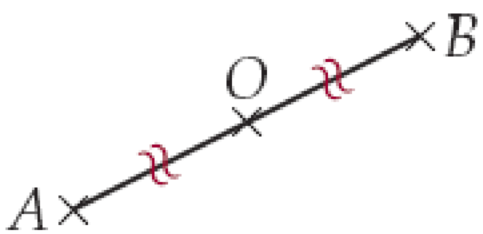
Adaptation réalisée par Marie-Laure Besson

Table des matières

Démontrer qu'un point est le milieu d'un segment

PROPRIÉTÉ 1

Si un point, sur un segment, est à égale distance des deux extrémités, alors ce point est le milieu du segment.



Ici, O ∈ [AB] et OA = OB.

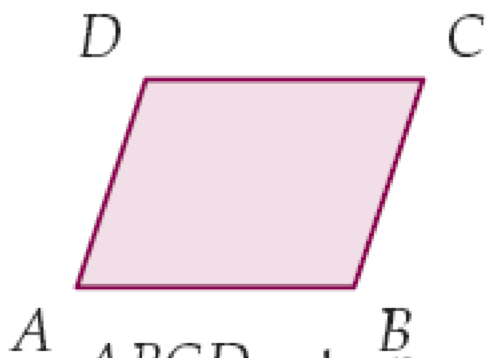
Donc O est le milieu de [AB].

Vers Table des matières

PROPRIÉTÉ 2

Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses diagonales se coupent en leur milieu.

(C'est aussi vrai pour les losanges, rectangles et carrés qui sont des parallélogrammes particuliers.)



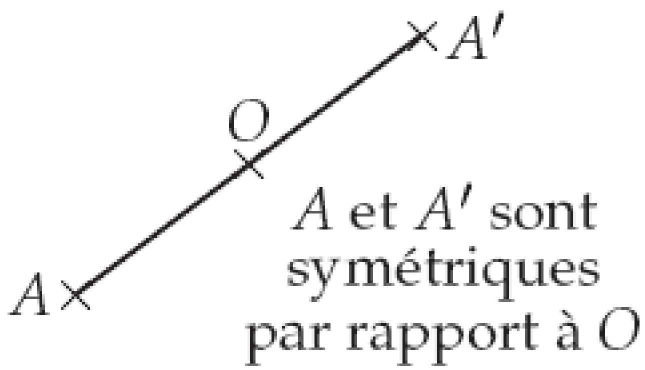
$ABCD$ est un parallélogramme

Ici, ABCD est un parallélogramme.

Donc ses diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu.

PROPRIÉTÉ 3

Si deux points sont symétriques par rapport à un point alors le centre de symétrie est le milieu du segment d'extrémités les deux symétriques.



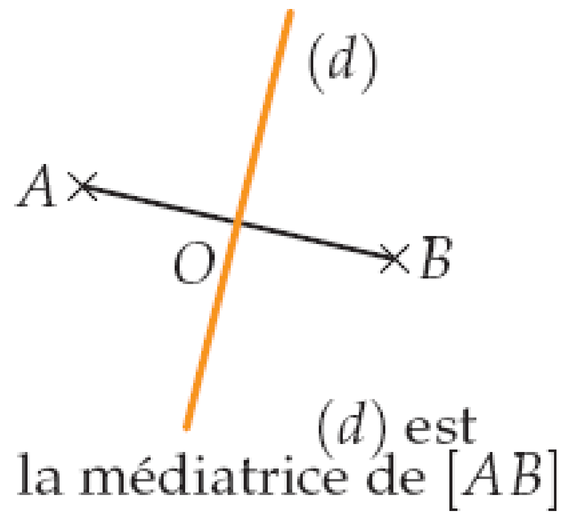
Ici, A et A′ sont symétriques par rapport au point O.

Donc O est le milieu du segment [AA′].

Vers Table des matières

PROPRIÉTÉ 4

Si une droite est la médiatrice d'un segment alors elle coupe ce segment en son milieu.

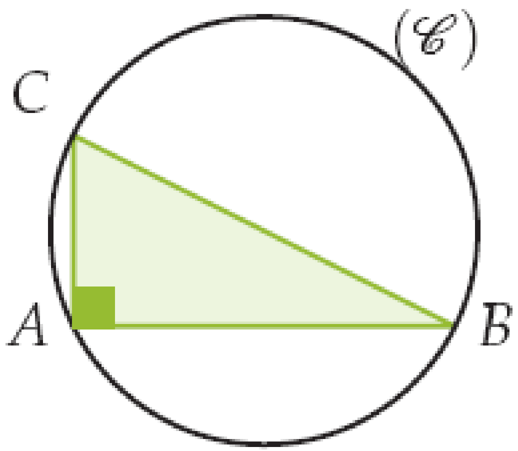


Ici, la médiatrice de [AB] coupe [AB] en O.

Donc O est le milieu de [AB].

PROPRIÉTÉ 5

Si un triangle est rectangle alors son cercle circonscrit a pour centre le milieu de son hypoténuse.



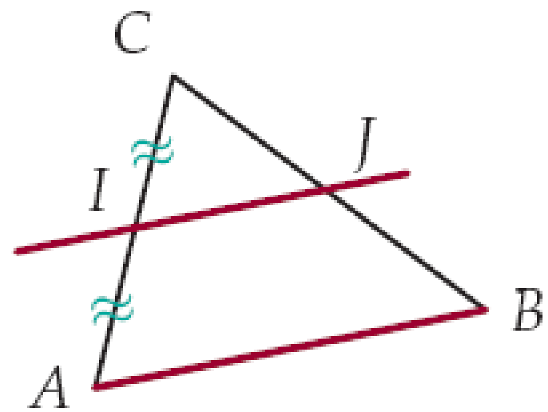
Ici, ABC est un triangle rectangle en A.

Donc le centre de son cercle circonscrit est le milieu de son hypoténuse [AB].

Vers Table des matières

PROPRIÉTÉ 6

Si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté alors elle passe par le milieu du troisième côté.



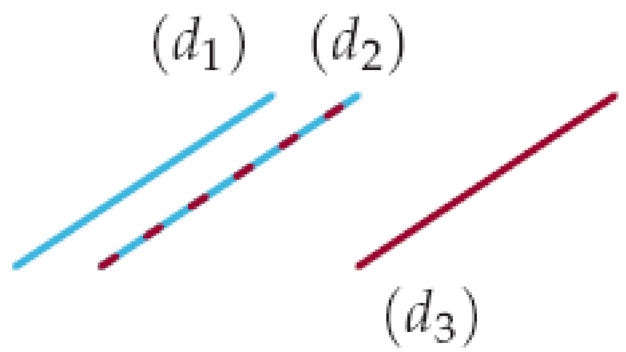
Ici, dans le triangle ABC, I est le milieu de [AC] et la parallèle à [AB] passant par I coupe [BC] en J. Donc J est le milieu du segment [BC].

Vers Table des matières

Démontrer que deux droites sont parallèles

PROPRIÉTÉ 7

Si deux droites sont parallèles alors toute droite parallèle à l’une est parallèle à l’autre.



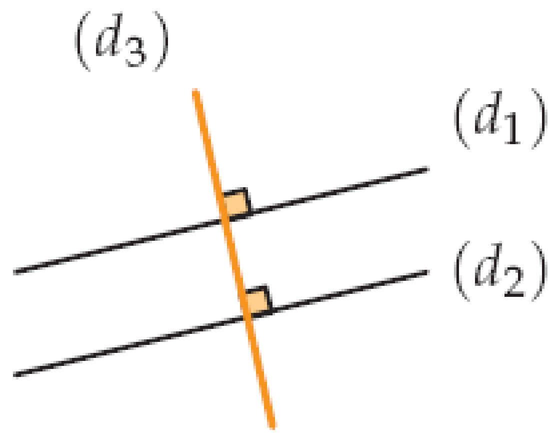
Ici, (d1) // (d2) et (d2) // (d3).

Donc (d1) // (d3).

Vers Table des matières

PROPRIÉTÉ 8

Si deux droites sont perpendiculaires à la même droite alors elles sont parallèles entre elles.

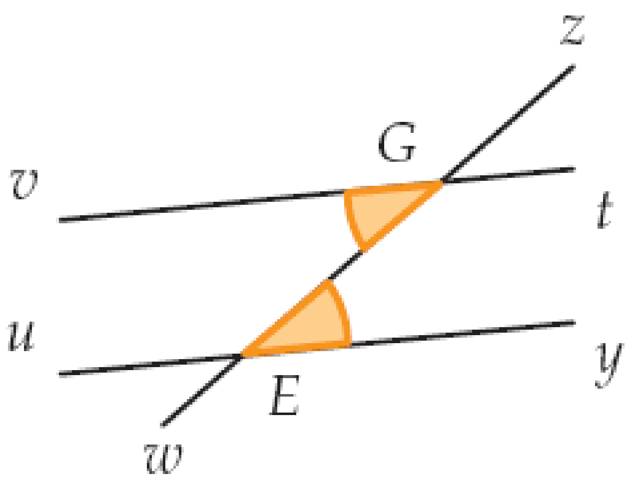


Ici, (d1) ⊥ (d3) et (d2) ⊥ (d3).

Donc (d1) // (d2).

PROPRIÉTÉ 9

Si deux droites coupées par une sécante forment deux angles alternes-internes de même mesure alors elles sont parallèles.



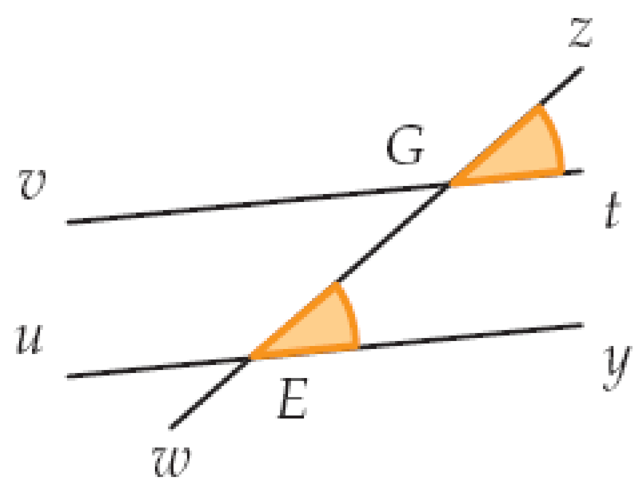
Ici, les droites (vt) et (uy) sont coupées par la sécante (zw), et les angles $\widehat{vGw}$ et $\widehat{zEy}$ sont alternes-internes de même mesure.

Donc (vt) // (uy).

Vers Table des matières

PROPRIÉTÉ 10

Si deux droites coupées par une sécante forment deux angles correspondants de même mesure alors elles sont parallèles.



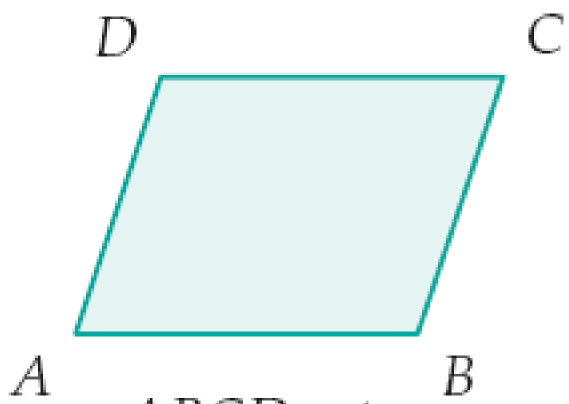
Ici, les droites (vt) et (uy) sont coupées par la sécante (zw), et les angles $\widehat{zGt}$ et $\widehat{zEy}$ sont correspondants et de même mesure.

Donc (vt) // (uy).

PROPRIÉTÉ 11

Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés sont parallèles.

(C'est aussi vrai pour les losanges, rectangles et carrés qui sont des parallélogrammes particuliers.)



ABCD est un parallélogramme

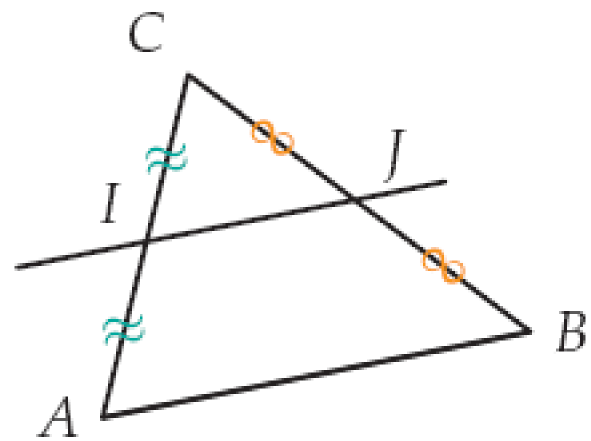
Ici, ABCD est un parallélogramme.

Donc (AB) // (CD) et (AD) // (BC).

Vers Table des matières

PROPRIÉTÉ 12

Si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés alors elle est parallèle au troisième côté.

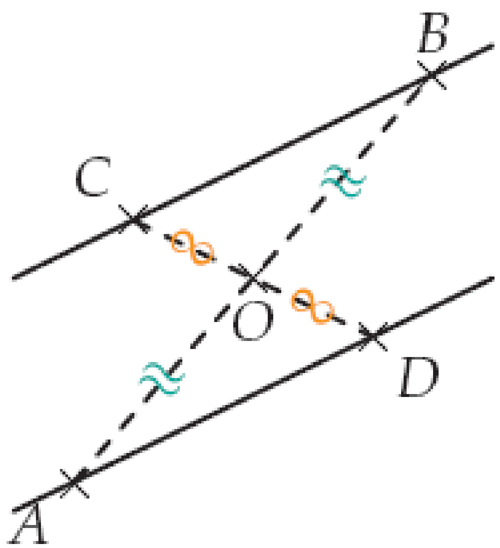


Ici, dans le triangle ABC, I est le milieu de [AC] et J est le milieu de [BC].

Donc (I J) est parallèle à (AB).

PROPRIÉTÉ 13

Si deux droites sont symétriques par rapport à un point alors elles sont parallèles.



Ici, (AD) et (BC) sont symétriques par rapport à O. Donc (AD) // (BC).

Vers Table des matières

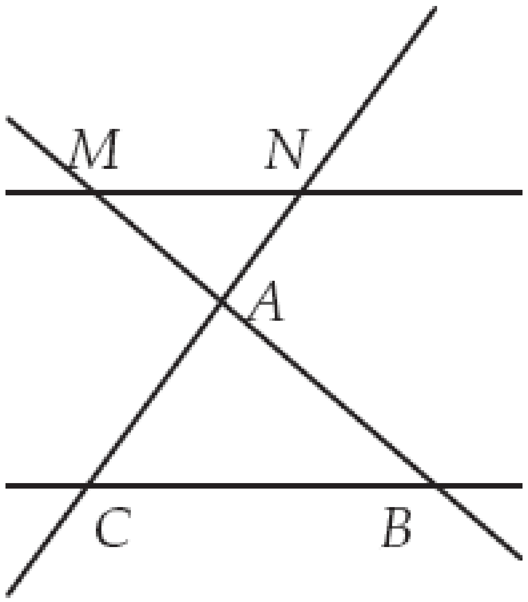
PROPRIÉTÉ 14

Réciproque du théorème de Thalès

Si les points A, B, M d'une part et les points A, C, N d'autre part sont alignés dans le même ordre et si

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN}$$

alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.



Ici, les points M, A, B d'une part et les points N, A, C d'autre part sont alignés dans cet ordre.

Si, de plus,

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

alors (MN) // (BC).

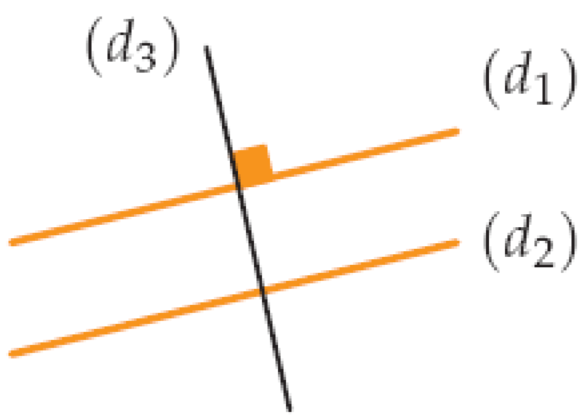
Vers Table des matières

Vers Table des matières

Démontrer que deux droites sont perpendiculaires

PROPRIÉTÉ 15

Si deux droites sont parallèles alors toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.



Ici, (d1) // (d2) et (d1) ⊥ (d3)

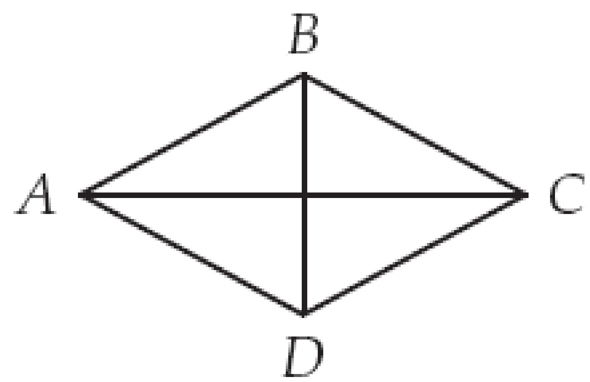
Donc (d2) ⊥ (d3).

Vers Table des matières

PROPRIÉTÉ 16

Si un quadrilatère est un losange alors ses diagonales sont perpendiculaires.

(C'est aussi vrai pour le carré qui est un losange particulier.)



$ABCD$ est un losange

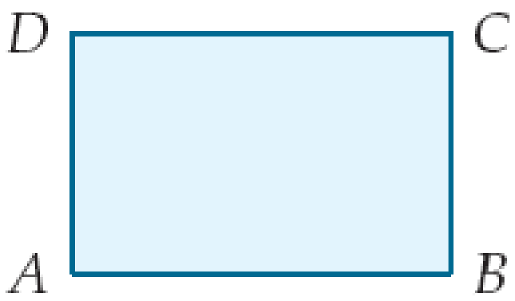
Ici, ABCD est un losange.

Donc (AC) ⊥ (BD).

PROPRIÉTÉ 17

Si un quadrilatère est un rectangle alors ses côtés consécutifs sont perpendiculaires.

(C’est aussi vrai pour le carré qui est un rectangle particulier.)



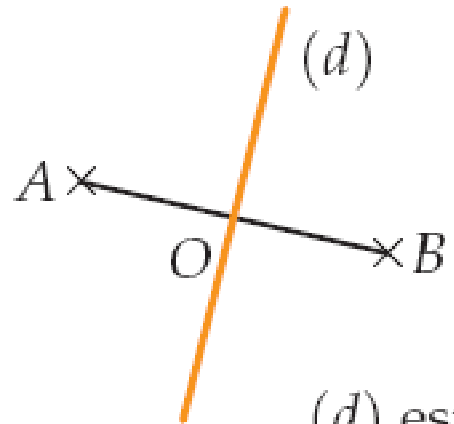
ABCD est un rectangle

Ici, ABCD est un rectangle.

Donc (AB) ⊥ (AD), (AD) ⊥ (DC), (DC) ⊥ (BC) et (BC) ⊥ (AB).

PROPRIÉTÉ 18

Si une droite est la médiatrice d’un segment alors elle est perpendiculaire à ce segment.



(*d*) est la médiatrice de [*AB*]

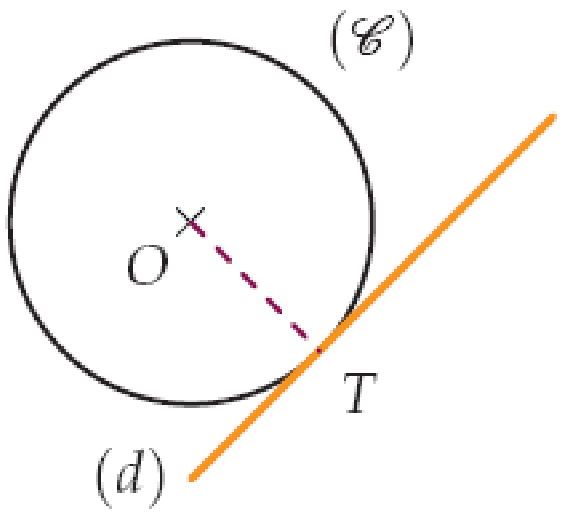
Ici, (d) est la médiatrice du segment [AB].

Donc (d) ⊥ (AB).

Vers Table des matières

PROPRIÉTÉ 19

Si une droite est tangente à un cercle en un point alors elle est perpendiculaire au rayon de ce cercle qui a pour extrémité ce point.



Ici, la droite (d) est la tangente en T au cercle de centre O.

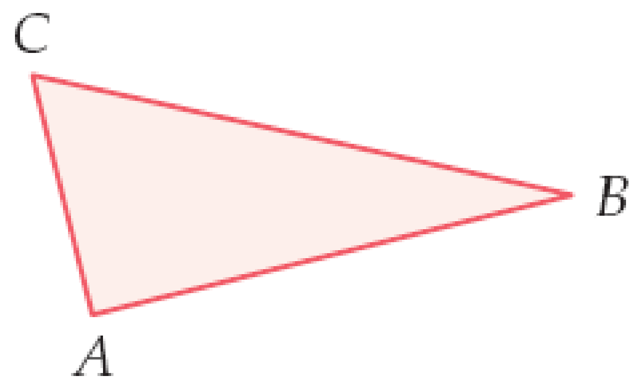
Donc (d) $\perp$ (OT).

Démontrer qu’un triangle est rectangle

PROPRIÉTÉ 20

Réciproque du théorème de Pythagore :

Si, dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés alors le triangle est rectangle et il a ce côté pour hypoténuse.

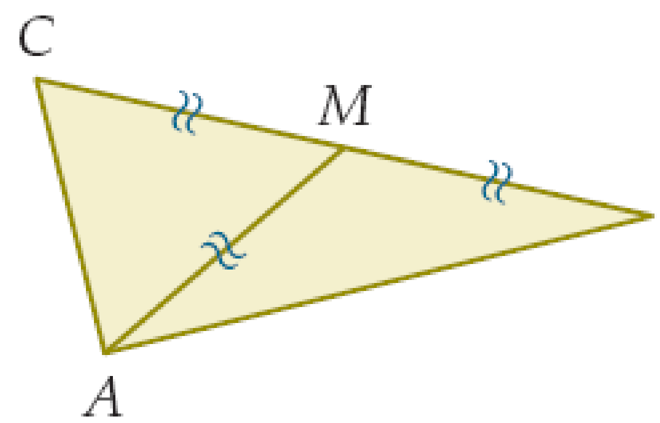


Si dans le triangle ABC, $BC^2 = BA^2 + AC^2$ alors le triangle ABC est rectangle d'hypoténuse [BC].

Vers Table des matières

PROPRIÉTÉ 21

Si, dans un triangle, la longueur de la médiane relative à un côté est égale à la moitié de la longueur de ce côté alors ce triangle est rectangle et il admet ce côté pour hypoténuse.



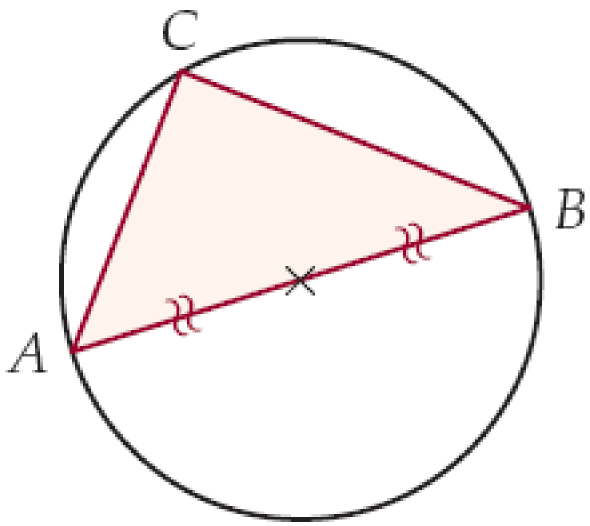
Ici, [AM] est la médiane relative à [BC] et

AM = BC ÷ 2.

Donc ABC est rectangle en A.

PROPRIÉTÉ 22

Si un triangle est inscrit dans un cercle de diamètre l'un de ses côtés alors il est rectangle et il admet ce diamètre pour hypoténuse.



Ici, C appartient au cercle de diamètre [AB].

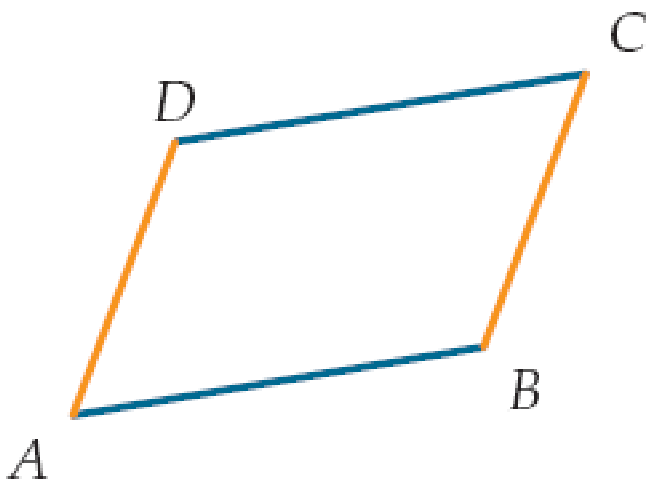
Donc ABC est rectangle en C.

Vers Table des matières

Démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme

PROPRIÉTÉ 23

Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles deux à deux alors c'est un parallélogramme.



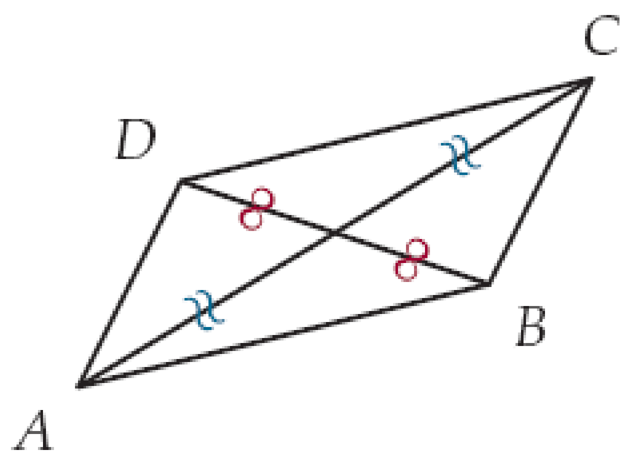
Ici, (AB) // (DC) et (AD) // (BC).

Donc ABCD est un parallélogramme.

Vers Table des matières

PROPRIÉTÉ 24

Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu alors c'est un parallélogramme.

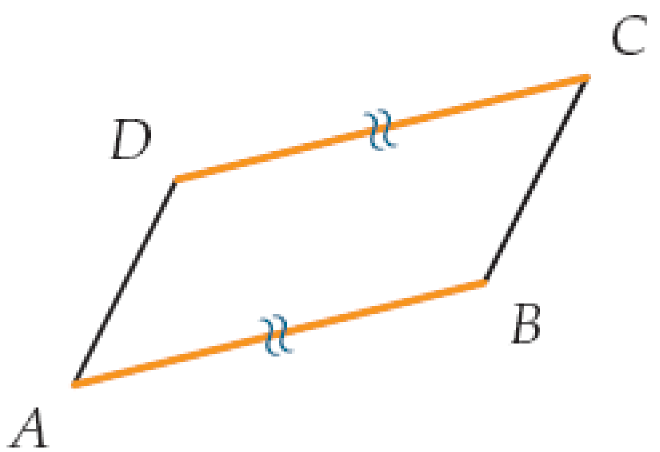


Ici, [AC] et [BD] se coupent en leur milieu.

Donc, ABCD est un parallélogramme.

PROPRIÉTÉ 25

Si un quadrilatère non croisé a deux côtés opposés parallèles de même longueur alors c'est un parallélogramme.



Ici, ABCD est non croisé avec AB = DC et

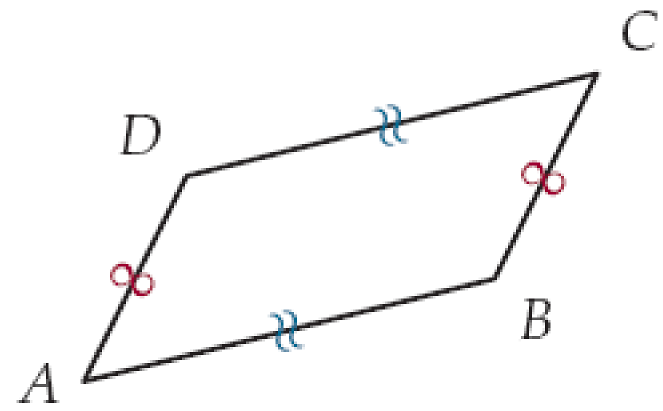
(AB) // (CD).

Donc, ABCD est un parallélogramme.

Vers Table des matières

PROPRIÉTÉ 26

Si un quadrilatère a ses côtés opposés de la même longueur deux à deux alors c'est un parallélogramme.

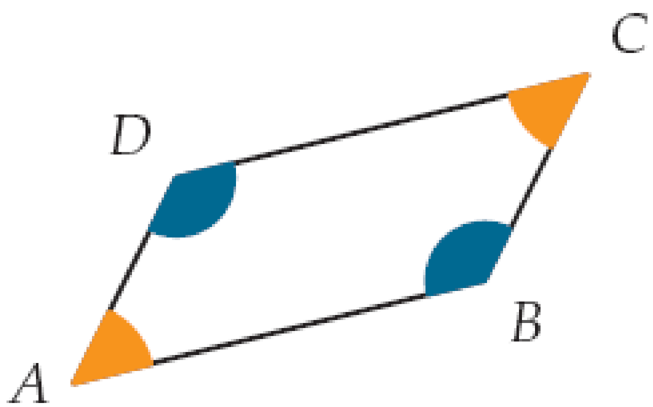


Ici, AB = CD et AD = BC.

Donc, ABCD est un parallélogramme.

PROPRIÉTÉ 27

Si un quadrilatère a ses angles opposés de la même mesure alors c’est un parallélogramme.



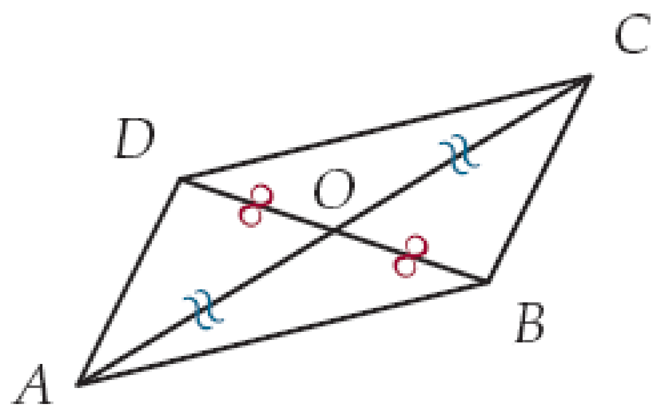
Ici, $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{DAB} = \widehat{BCD}$.

Donc, ABCD est un parallélogramme.

Vers Table des matières

PROPRIÉTÉ 28

Si un quadrilatère a un centre de symétrie alors c’est un parallélogramme.

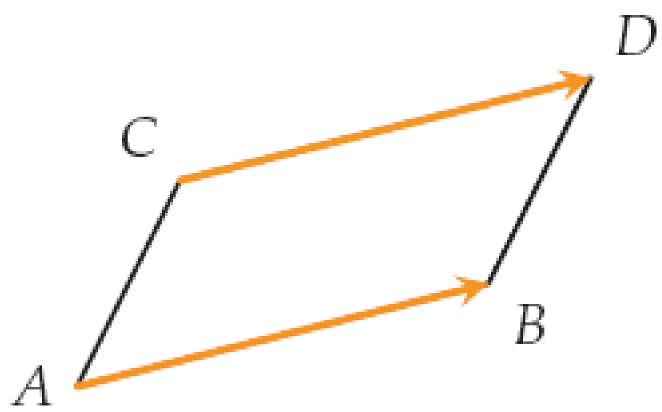


Ici, A et C d’une part et B et D d’autre part sont symétriques par rapport à O.

Donc, ABCD est un parallélogramme.

PROPRIÉTÉ 29

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors ABDC est un parallélogramme.



Ici, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

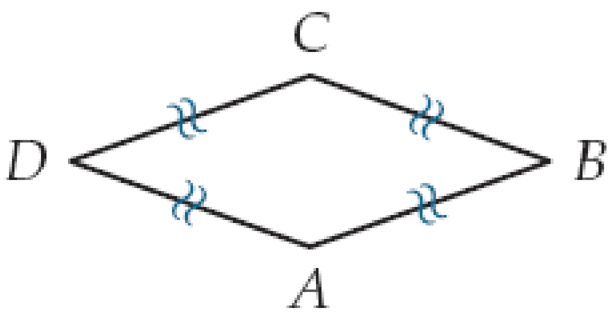
Donc, ABDC est un parallélogramme.

Démontrer qu'un quadrilatère est un losange

Vers Table des matières

PROPRIÉTÉ 30

Si un quadrilatère a ses quatre côtés de même longueur alors c'est un losange.



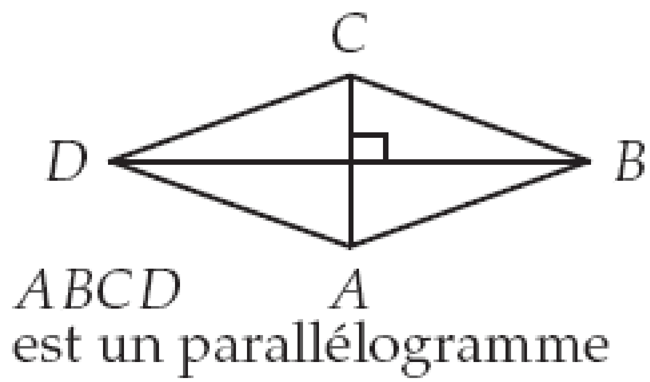
Ici, AB = BC = CD = DA.

Donc ABCD est un losange.

Vers Table des matières

PROPRIÉTÉ 31

Si un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires alors c'est un losange.



Ici, ABCD est un parallélogramme et

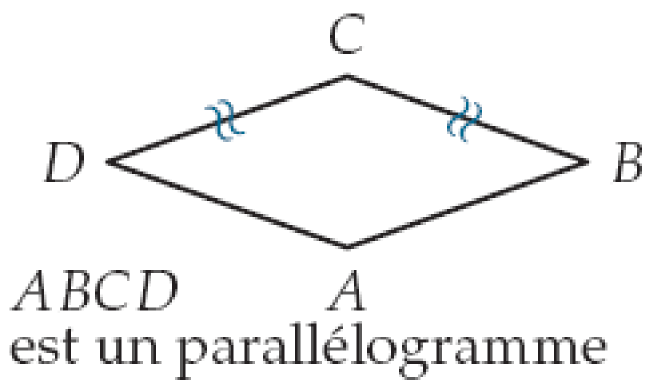
(AC) $\perp$ (BD).

Donc ABCD est un losange.

PROPRIÉTÉ 32

Si un parallélogramme a deux côtés consécutifs

de la même longueur alors c'est un losange.



Ici, ABCD est un parallélogramme avec

CD = CB.

Donc ABCD est un losange.

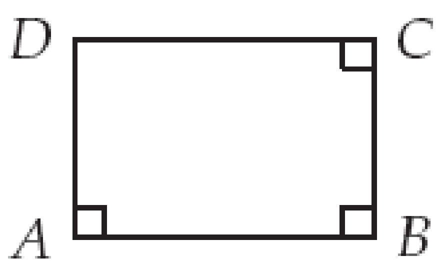
Vers Table des matières

Vers Table des matières

Démontrer qu'un quadrilatère est un rectangle

PROPRIÉTÉ 33

Si un quadrilatère possède trois angles droits alors c’est un rectangle.



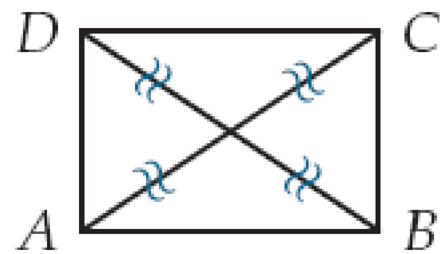
Ici, (AD) ⊥ (AB), (AB) ⊥ (BC) et (BC) ⊥ (DC).

Donc ABCD est un rectangle.

Vers Table des matières

PROPRIÉTÉ 34

Si un parallélogramme a ses diagonales de la même longueur alors c’est un rectangle.



ABCD est un parallélogramme

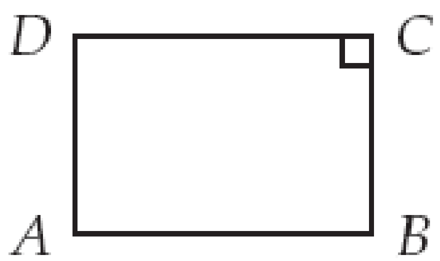
Ici, ABCD est un parallélogramme avec

AC = BD.

Donc ABCD est un rectangle.

PROPRIÉTÉ 35

Si un parallélogramme possède deux côtés consécutifs perpendiculaires alors c'est un rectangle.



ABCD est
un parallélogramme

Ici, ABCD est un parallélogramme avec

(BC) ⊥ (CD).

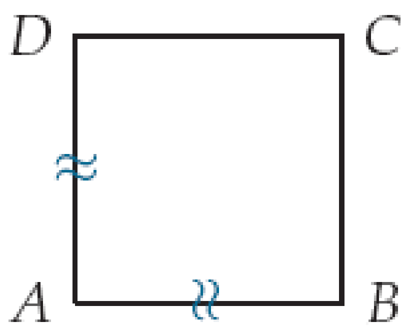
Donc ABCD est un rectangle.

Vers Table des matières

Démontrer qu'un quadrilatère est un carré

PROPRIÉTÉ 36

Si un rectangle possède deux côtés consécutifs de même longueur alors c’est un carré.



ABCD est un rectangle

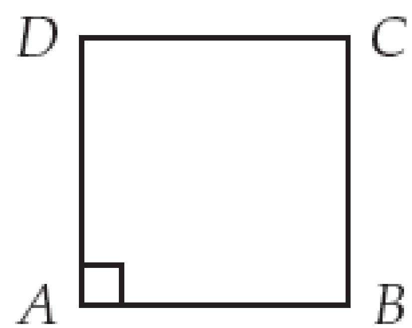
Ici, ABCD est un rectangle avec AB = AD.

Donc ABCD est un carré.

Vers Table des matières

PROPRIÉTÉ 37

Si un losange possède deux côtés consécutifs perpendiculaires alors c’est un carré.



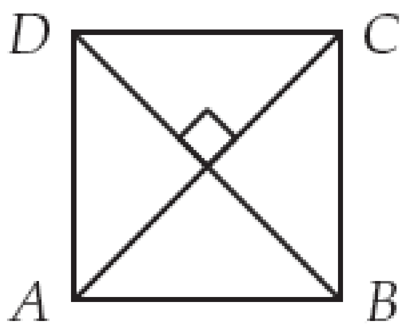
ABCD est un losange

Ici, ABCD est un losange avec (AB) ⊥ (AD).

Donc ABCD est un carré.

PROPRIÉTÉ 38

Si un rectangle a ses diagonales perpendiculaires alors c’est un carré.



$ABCD$ est un rectangle

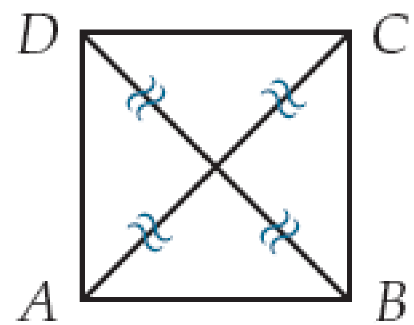
Ici, ABCD est un rectangle avec (AC) ⊥ (BD).

Donc ABCD est un carré.

Vers Table des matières

PROPRIÉTÉ 39

Si un losange a ses diagonales de même longueur alors c’est un carré.



$ABCD$ est un losange

Ici, ABCD est un losange avec AC = BD.

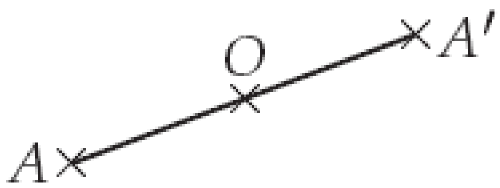
Donc ABCD est un carré.

Vers Table des matières

Déterminer la mesure d'un segment

PROPRIÉTÉ 40

Si un point est le milieu d'un segment alors sa distance aux extrémités du segment est la moitié de la mesure du segment.



O est le milieu de $[AA']$

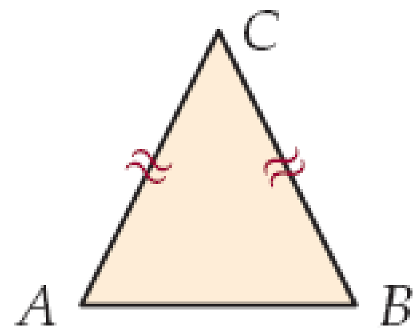
Ici, O est le milieu de [AA'].

Donc OA = OA′ = AA′ ÷ 2.

Vers Table des matières

PROPRIÉTÉ 41

Si un triangle est isocèle alors il a deux côtés de même longueur.

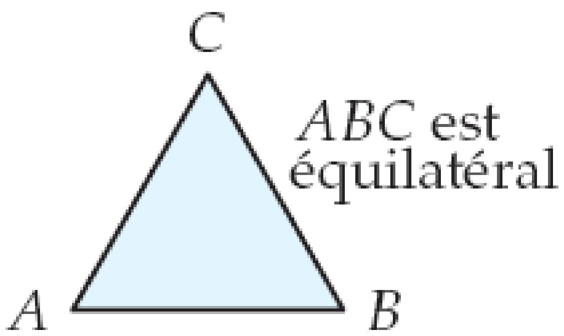


Ici, ABC est isocèle en C.

Donc CA = CB.

PROPRIÉTÉ 42

Si un triangle est équilatéral alors il a tous ses côtés de la même longueur.



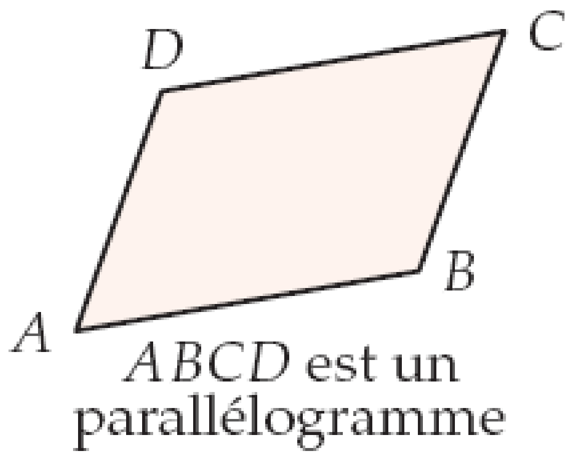
Ici, ABC est équilatéral.

Donc AB = BC = CA.

Vers Table des matières

PROPRIÉTÉ 43

Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses côtés opposés ont la même longueur. (C’est également vrai pour les rectangles, les losanges et les carrés qui sont des parallélogrammes particuliers.)



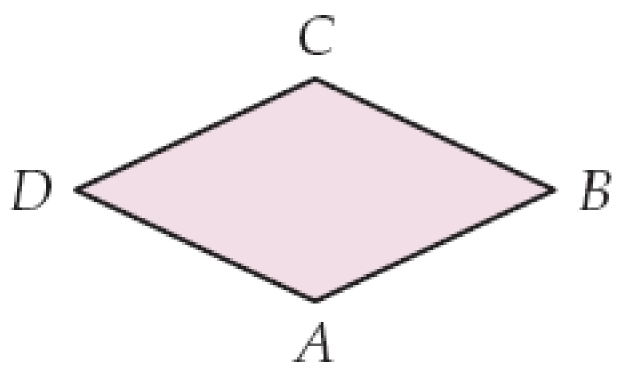
Ici, ABCD est un parallélogramme.

Donc AB = DC et AD = BC.

PROPRIÉTÉ 44

Si un quadrilatère est un losange alors tous ses côtés sont de la même longueur.

(C'est également vrai pour les carrés qui sont des losanges particuliers.)



$ABCD$ est un losange

Ici, ABCD est un losange.

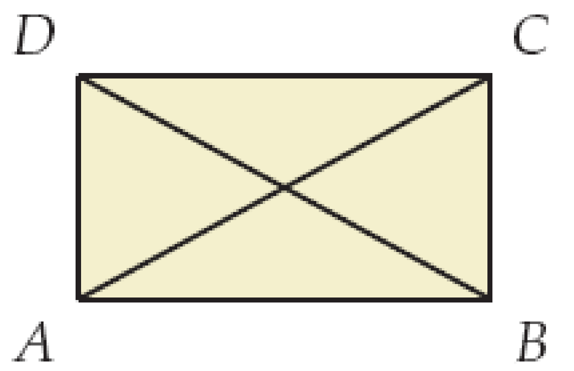
Donc AB = BC = CD = DA.

Vers Table des matières

PROPRIÉTÉ 45

Si un quadrilatère est un rectangle alors ses diagonales ont la même longueur.

(C'est également vrai pour les carrés qui sont des rectangles particuliers.)



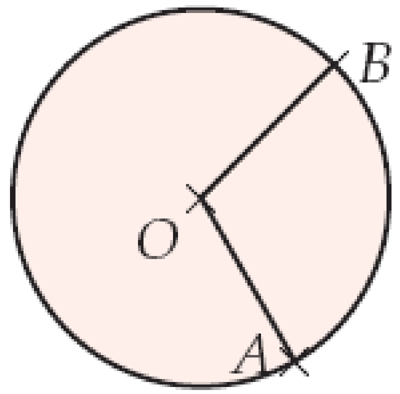
$ABCD$ est un rectangle

Ici, ABCD est un rectangle.

Donc AC = BD.

PROPRIÉTÉ 46

Si deux points appartiennent à un cercle alors ils sont équidistants du centre de ce cercle.



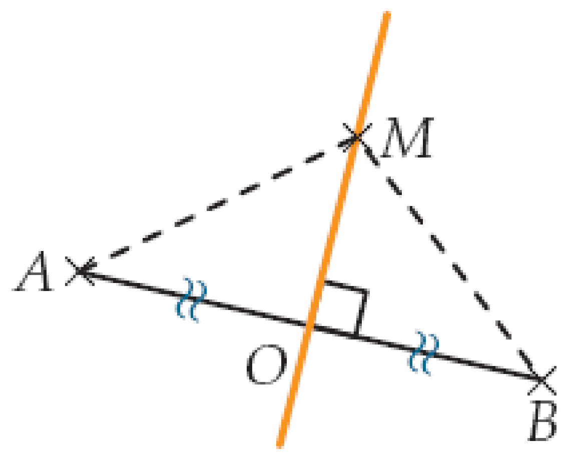
Ici, A et B appartiennent à un cercle de centre O.

Donc OA = OB.

Vers Table des matières

PROPRIÉTÉ 47

Si un point appartient à la médiatrice d'un segment alors il est équidistant des extrémités de ce segment.

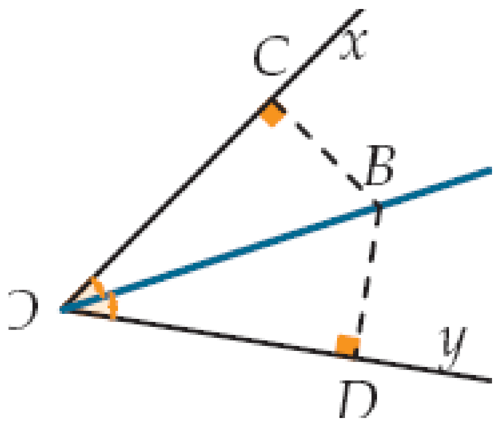


Ici, M appartient à la médiatrice de [AB].

Donc MA = MB.

PROPRIÉTÉ 48

Si un point appartient à la bissectrice d'un angle alors il est situé à la même distance des côtés de cet angle.



Ici, B appartient à la bissectrice de $\widehat{xOy}$,

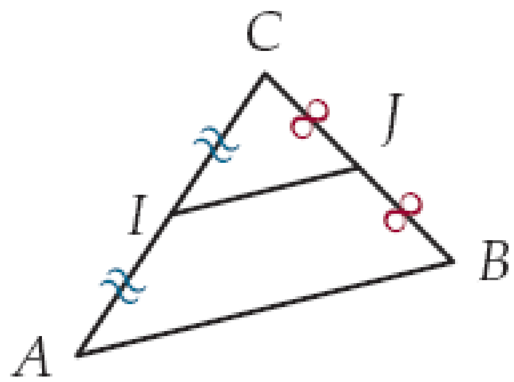
(BD) ⊥ (OD) et (BC) ⊥ (OC).

Donc BC = BD.

Vers Table des matières

PROPRIÉTÉ 49

Si, dans un triangle, un segment joint les milieux de deux côtés alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté.



Ici, dans le triangle ABC, I est le milieu de [AC] et J est le milieu de [BC].

Donc, IJ = AB ÷ 2.

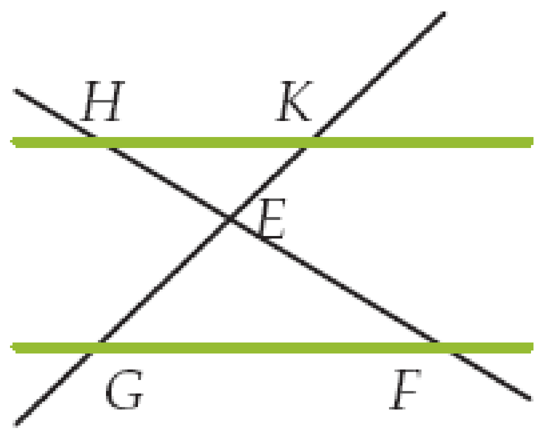
PROPRIÉTÉ 50

Théorème de Thalès :

Si M ∈ (AB), N ∈ (BC) et (BC) // (MN)

alors

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$$



Vers Table des matières

Ici, H ∈ (EF), K ∈ (EG) et (HK) // (GF).

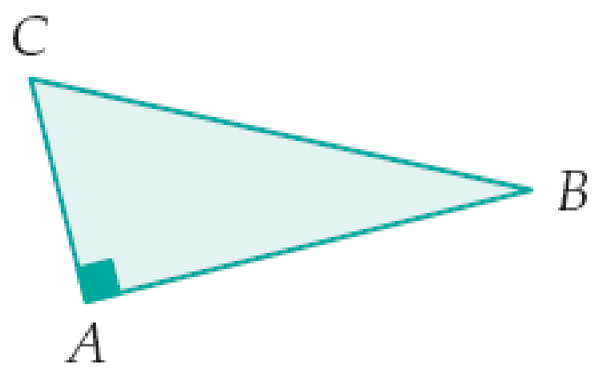
Donc

$$\frac{EF}{EH} = \frac{EG}{EK} = \frac{GF}{HK}$$

PROPRIÉTÉ 51

Théorème de Pythagore :

Si un triangle est rectangle alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.



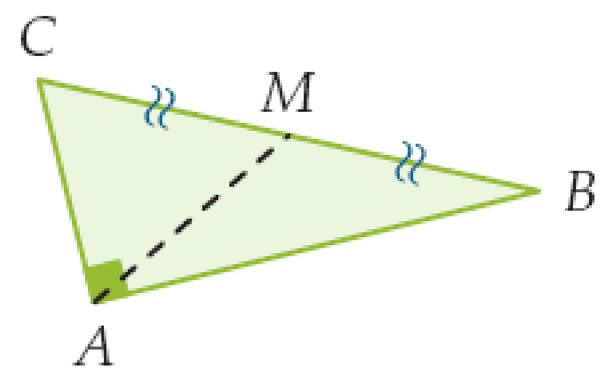
Ici, ABC est rectangle en A.

Donc, $BC^2 = BA^2 + AC^2$.

Vers Table des matières

PROPRIÉTÉ 52

Si un triangle est rectangle alors la médiane issue de l'angle droit mesure la moitié de l'hypoténuse.

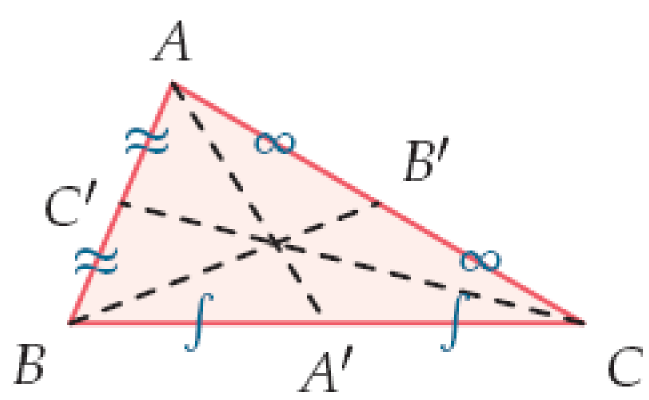


Ici, ABC est rectangle en A et M est le milieu de [BC].

Donc AM = BC ÷ 2.

PROPRIÉTÉ 53

Dans un triangle, le centre de gravité se situe au deux tiers des médianes en partant du sommet.



Ici, G est le centre de gravité du triangle ABC et [AA′] en est une médiane.

Donc

$$AG = \frac{2}{3} AA'.$$

Vers Table des matières

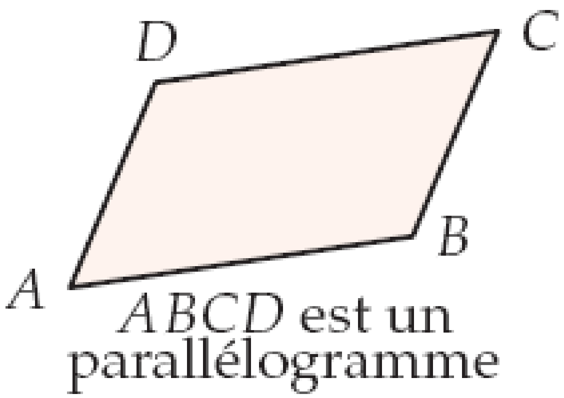
Vers Table des matières

Déterminer la mesure d’un angle

PROPRIÉTÉ 54

Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ses angles opposés ont la même mesure.

(C'est également vrai pour les losanges, les rectangles et les carrés qui sont des parallélogrammes particuliers.)

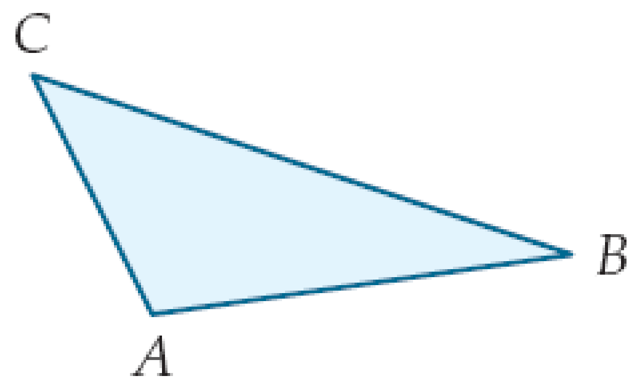


Ici, ABCD est un parallélogramme.

Donc $\widehat{DAB} = \widehat{BCD}$ et $\widehat{ADC} = \widehat{ABC}$.

PROPRIÉTÉ 55

Dans un triangle, la somme des mesures des angles est égale à 180°.

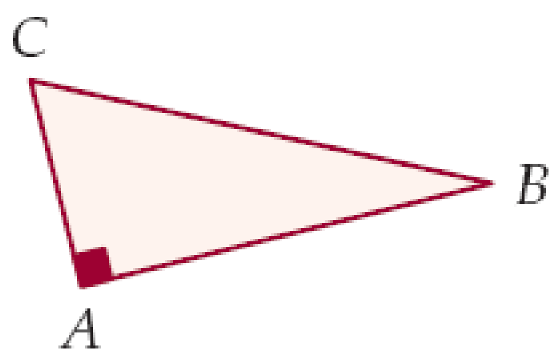


Ici, ABC est un triangle.

Donc $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$.

PROPRIÉTÉ 56

Si un triangle est rectangle alors ses angles aigus sont complémentaires.



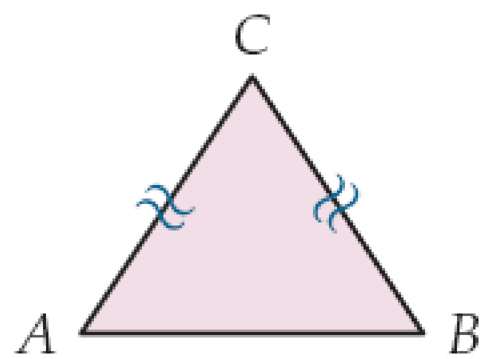
Ici, ABC est rectangle en A.

Donc $\widehat{B} + \widehat{C} = 90°$.

Vers Table des matières

PROPRIÉTÉ 57

Si un triangle est isocèle alors ses angles à la base ont la même mesure.

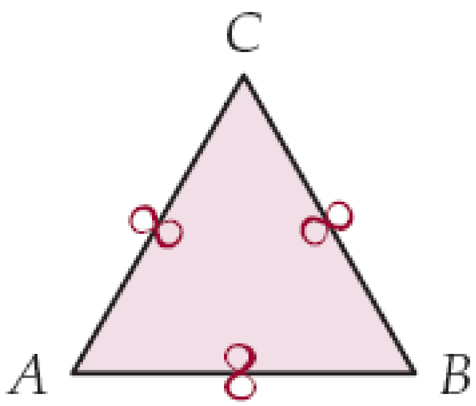


Ici, ABC est isocèle en C.

Donc $\widehat{A} = \widehat{B}$.

PROPRIÉTÉ 58

Si un triangle est équilatéral alors ses angles mesurent 60°.

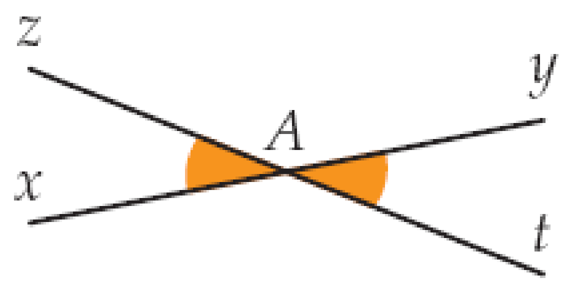


Ici, ABC est équilatéral.

Donc $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60°$.

PROPRIÉTÉ 59

Si deux angles sont opposés par le sommet alors ils ont la même mesure.



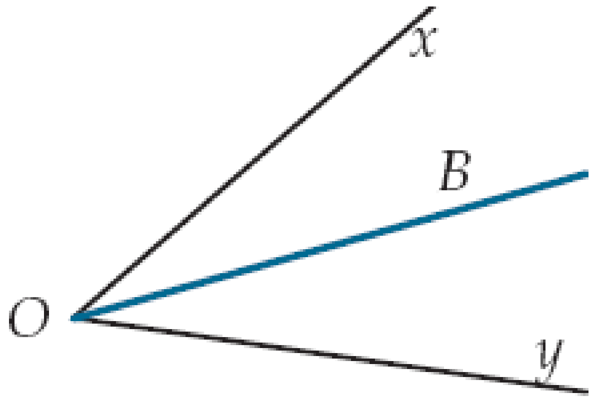
Ici, $\widehat{xAz}$ et $\widehat{yAt}$ sont opposés par le sommet.

Donc, $\widehat{xAz} = \widehat{yAt}$.

Vers Table des matières

PROPRIÉTÉ 60

Si une droite est la bissectrice d'un angle alors elle partage l'angle en deux angles adjacents de même mesure.



$[OB)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$

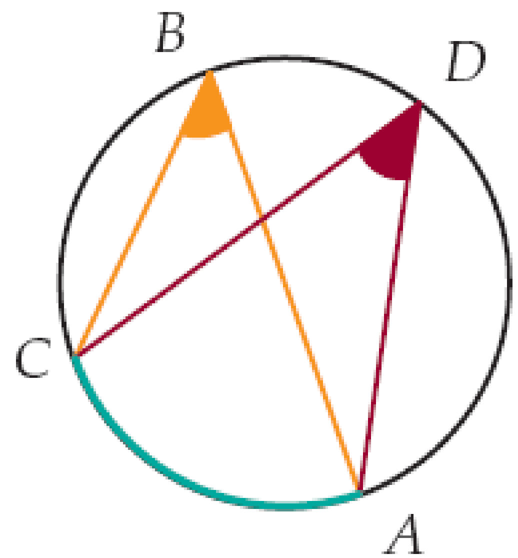
Ici, [OB) est la bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$.

Donc $\widehat{xOB} = \widehat{BOy} = \widehat{xOy} \div 2$.

Vers Table des matières

PROPRIÉTÉ 61

Si deux angles sont inscrits dans un même cercle et s'ils interceptent le même arc de cercle alors ils ont la même mesure.

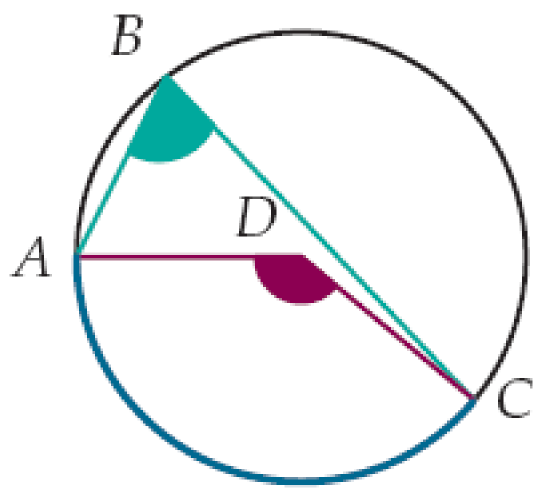


Ici, les angles inscrits $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{AC}$.

Donc, $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$.

PROPRIÉTÉ 62

Si un angle inscrit dans un cercle et un angle au centre interceptent le même arc de cercle, alors l'angle au centre mesure le double de l'angle inscrit.



Ici, l'angle inscrit $\widehat{ABC}$ et l'angle au centre $\widehat{ADC}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{AC}$.

Donc, $\widehat{ADC} = 2\widehat{ABC}$.

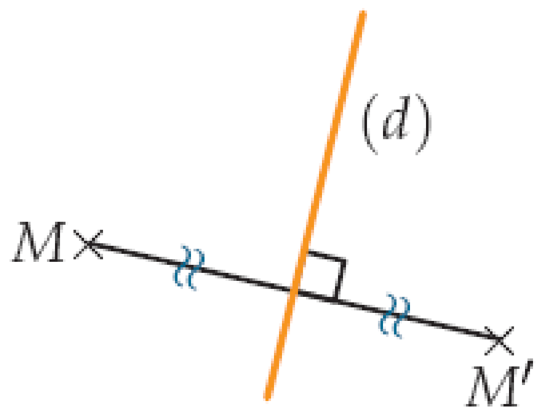
Vers Table des matières

Vers Table des matières

Démontrer avec les droites remarquables du triangle

PROPRIÉTÉ 63

Si deux points sont symétriques par rapport à une droite alors cette droite est la médiatrice du segment ayant pour extrémités ces deux points.



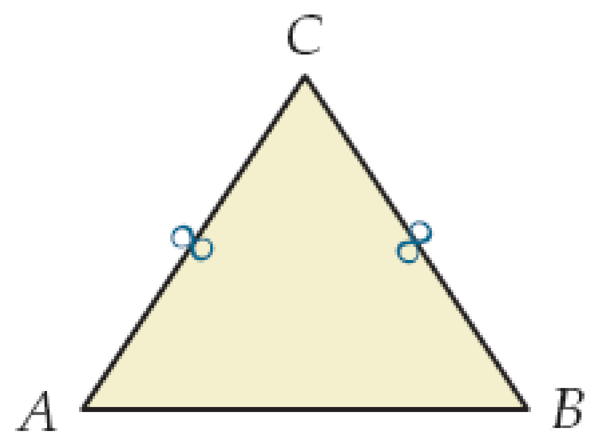
Ici, M et M′ sont symétriques par rapport à la droite (d).

Donc (d) est la médiatrice de [MM′].

Vers Table des matières

PROPRIÉTÉ 64

Si un point est équidistant des extrémités d'un segment alors il est situé sur la médiatrice de ce segment.

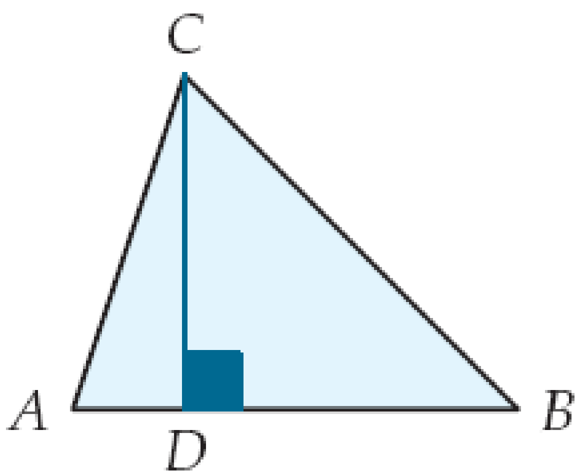


Ici, AC = CB.

Donc C appartient à la médiatrice de [AB].

PROPRIÉTÉ 65

Si, dans un triangle, une droite passe par un sommet et est perpendiculaire au côté opposé alors c’est une hauteur du triangle.



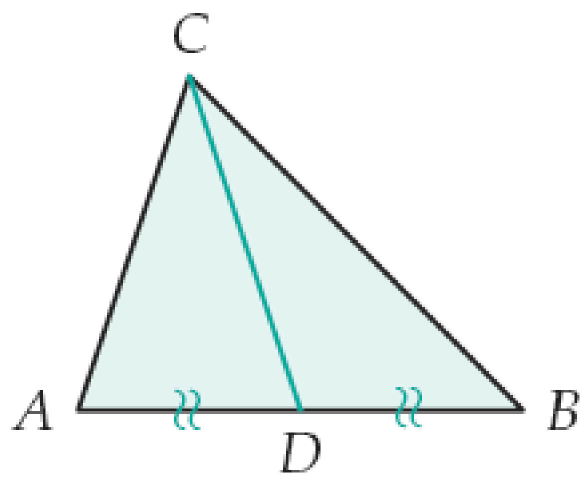
Ici, (CD) ⊥ (AB).

Donc (CD) est la hauteur issue de C du triangle ABC

Vers Table des matières

PROPRIÉTÉ 66

Si, dans un triangle, une droite passe par un sommet et par le milieu du côté opposé alors c’est une médiane du triangle.

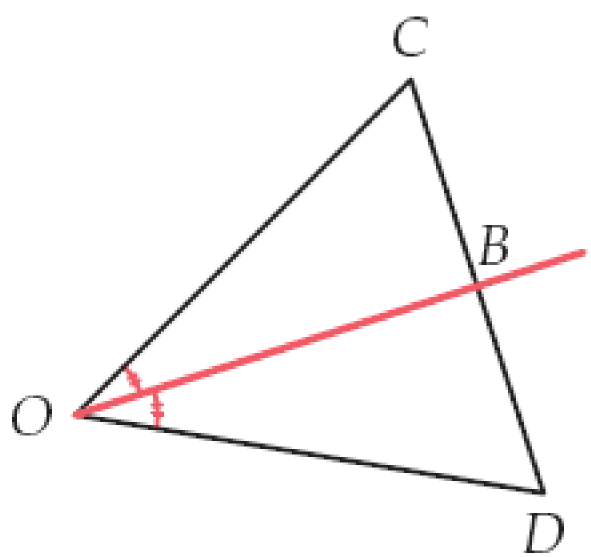


Ici, D est le milieu de [AB].

Donc, [CD] est la médiane relative à [AB] du triangle ABC.

PROPRIÉTÉ 67

Si une droite partage un angle en deux angles égaux alors cette droite est la bissectrice de l'angle.



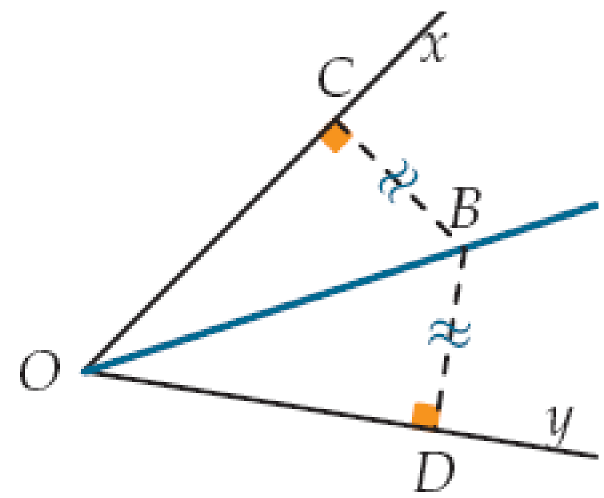
Ici, la droite (OB) partage l'angle $\widehat{COD}$ en deux angles égaux.

Donc (OB) est la bissectrice de l'angle $\widehat{COD}$.

Vers Table des matières

PROPRIÉTÉ 68

Si un point est situé à la même distance des côtés d'un angle alors il appartient à la bissectrice de cet angle.

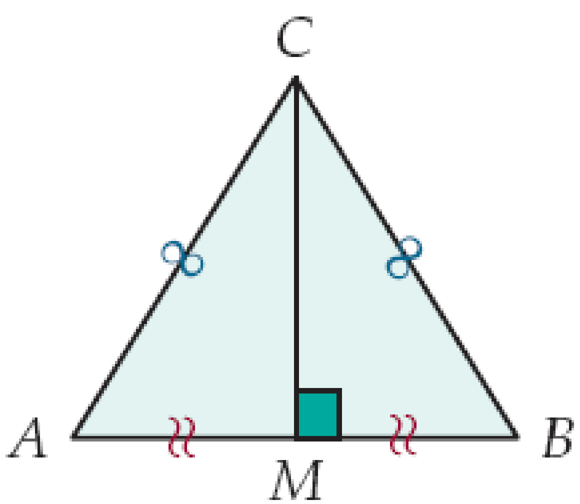


Ici, BC = BD, (OC) ⊥ (BC) et (BD) ⊥ (OD).

Donc, [OB) est la bissectrice de l'angle $\widehat{COD}$

PROPRIÉTÉ 69

Si un triangle est isocèle, alors la médiane, la hauteur, la bissectrice issues du sommet principal et la médiatrice de la base sont confondues.



Vers Table des matières

Ici, ABC est isocèle en C, M est le milieu de [AB] et (CM) ⊥ (AB).

Donc (CM) est :

la médiane relative à [AB],

la médiatrice de [AB],

la hauteur issue de C,

la bissectrice de $\widehat{ACB}$.