Brevet des collèges 2016 Métropole

EXERCISE 1 : 4 points

Une société commercialise des composants électroniques qu'elle fabrique dans deux usines.

Lors d'un contrôle de qualité, 500 composants sont prélevés dans chaque usine et sont examinés pour déterminer s'ils sont « bons » ou « défectueux ».

Résultats obtenus pour l'ensemble des 1000 composants prélevés :

Usine A :

Bons 473   Défectueux 27   Prélevé : 500

Usine B :

Bons 462   Défectueux 38   Prélevé : 500

Total :

Bons 935   Défectueux 65   Prélevé : 1000

1) Si on prélève un composant au hasard parmi ceux provenant de l'usine A, quelle est la probabilité qu'il soit défectueux ?

Réponse :

On suppose dans tout l'exercice être dans des conditions d'équiprobabilités.

Il y a 27 composants défectueux parmi les 500 de l'usine A donc si on prélève un composant au hasard parmi ceux provenant de l'usine A, la probabilité qu'il soit défectueux est :

$$p_1 = \frac{27}{500} = 0{,}054$$

2) Si on prélève un composant au hasard parmi ceux qui sont défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne de l'usine A ?

Réponse :

Il y a 65 composants défectueux et 27 proviennent de l'usine A donc si on prélève un composant au hasard parmi ceux défectueux, la probabilité qu'il provienne de l'usine A est :

$$p_2 = \frac{27}{65} \approx 0{,}415$$

3) Le contrôle est jugé satisfaisant si le pourcentage de composants défectueux est inférieur à 7 % dans chaque usine. Ce contrôle est-il satisfaisant ?

Réponse :

Dans l'usine A, le pourcentage de composants défectueux est de 0,054 = 5,4% d'après la question (1.). Ce qui est bien inférieur à 7%, le contrôle est donc jugé satisfaisant dans l'usine A.

Dans l'usine B.

Il y a 38 composants défectueux parmi les 500 de l'usine B donc si on prélève un composant au hasard parmi ceux provenant de l'usine B, la probabilité qu'il soit défectueux est :

$$p_3 = \frac{38}{500} = 0{,}076 = 7{,}6\% > 7\%$$

Le contrôle n'est donc pas jugé satisfaisant dans l'usine B.

EXERCICE 2 : 4,5 points

On considère les deux programmes de calcul ci-dessous.

Programme A

1) Choisir un nombre.

2) Multiplier par –2.

3) Ajouter 13.

Programme B

1) Choisir un nombre.

2) Soustraire 7.

3) Multiplier par 3.

1) Vérifier qu'en choisissant 2 au départ avec le programme A, on obtient 9.

Réponse :

1) Choisir un nombre : 2

2) Multiplier par –2 : $2 \times (-2) = -4$

3) Ajouter 13 : $-4 + 13 = 9$

En choisissant 2 au départ avec le programme A, on obtient 9.

2) Quel nombre faut-il choisir au départ avec le programme B pour obtenir 9 ?

Réponse : Pour trouver ce nombre avec le programme B, on peut effectuer les opérations réciproques en partant de la dernière étape :

On a obtenu 9

3) Diviser par 3 (au lieu de multiplier) : $9 \div 3 = 3$

2) Ajouter 7 (au lieu de soustraire) : $3 + 7 = 10$

1) Choisir un nombre : 10

Pour obtenir 9 avec le programme B il faut choisir le nombre 10.

Vérification :

1) Choisir un nombre : 10

2) Soustraire 7 : $10 - 7 = 3$

3) Multiplier par 3 : $3 \times 3 = 9$

3) Peut-on trouver un nombre pour lequel les deux programmes de calcul donnent le même résultat ?

Réponse : On part du nombre x.

Programme A

1) Choisir un nombre : x

2) Multiplier par –2 : $x \times (-2) = -2x$

3) Ajouter 13 : $-2x + 13$

Programme B

1) Choisir un nombre : x

2) Soustraire 7 : $x - 7$

3) Multiplier par 3 : $(x - 7) \times 3 = 3x - 21$

On cherche alors si il existe un nombre x tel que :

$$-2x + 13 = 3x - 21 \Leftrightarrow 13 + 21 = 3x + 2x$$

$$\Leftrightarrow 34 = 5x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{34}{5} = 6,8$$

L'unique nombre pour lequel les deux programmes donnent le même résultat est : $x = 6,8$

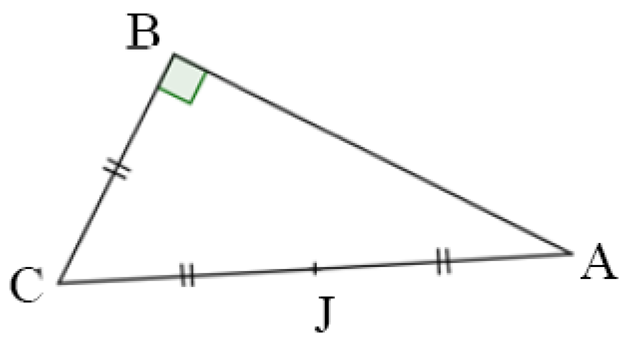
EXERCICE 3 : 5 points

Trois figures codées sont données ci-dessous. Elles ne sont pas dessinées en vraie grandeur.

Pour chacune d'elles, **déterminer la longueur AB au millimètre près**.

Dans cet exercice, on n'attend pas de démonstration rédigée. Il suffit d'expliquer brièvement le raisonnement suivi et de présenter clairement les calculs.

Figure 1



BC = 6 cm.

Réponse :

On va supposer que le point J est le milieu du segment [AC]

Méthode 1.

Dans ce cas on a d'après les données :

BC = 6 cm = JC = JA ⇒ AC = 2 × BC = 12 cm

On peut alors appliquer le théorème de Pythagore.

Dans le triangle BAC rectangle en B, d’après le théorème de Pythagore on a :

$$AC^2 = BA^2 + BC^2$$

$$12^2 = BA^2 + 6^2$$

$$BA = 12^2 - 6^2$$

$$BA^2 = 144 - 36$$

$$BA^2 = 108$$

Or BA est positif puisque c’est une longueur, l’unique solution possible est donc :

$$BA = \sqrt{108} \approx 10{,}39\ cm$$

$$BA \approx 10{,}4\ cm$$

Méthode 2.

Le cercle circonscrit à un triangle rectangle est de diamètre l’hypoténuse du triangle.

De ce fait le point J est le centre de ce cercle circonscrit et JB = JC.

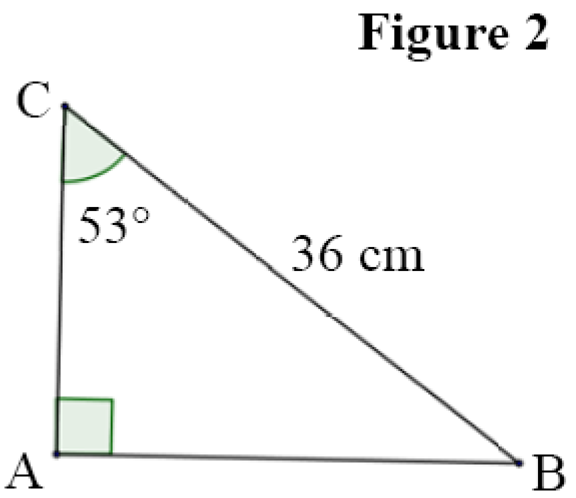
On en déduit alors que le triangle BCJ est équilatéral et donc que l’angle $\widehat{BCJ}$ est de mesure 60°.

Dans le triangle ABC rectangle en B on a alors :

$$\tan \widehat{BJC} = \frac{AB}{BC} \Leftrightarrow \tan 60° = \frac{AB}{6}$$

On obtient donc arrondi au millimètre :

$$AB = 6 \times \tan 60° \approx 10{,}4\ cm$$



Réponse :

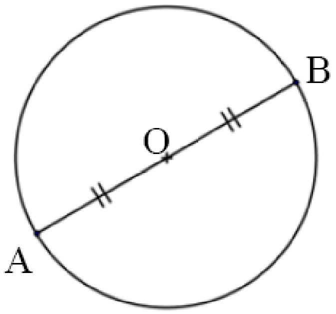
ABC est rectangle en A donc :

$$\sin \widehat{ACB} = \frac{AB}{CB} \Leftrightarrow \sin 53° = \frac{AB}{36}$$

On obtient donc arrondi au millimètre :

$$AB = 36 \times \sin 53° \approx 28{,}8\ cm$$

Figure 3



[AB] est un diamètre du cercle de centre O.

La longueur du cercle est 154 cm.

Réponse :

Le périmètre p d'un cercle de diamètre AB est :

$$p = \pi \times AB$$

Sachant que ce périmètre est égal à 154 cm on a, arrondi au millième :

$$\pi \times AB = 154 \Leftrightarrow AB = \frac{154}{\pi} \approx 49{,}0\ cm$$

EXERCICE 4 : 5 points

Lors des soldes, un commerçant décide d'appliquer une réduction de 30 % sur l'ensemble des articles de son magasin.

1) L'un des articles coûte 54 € avant la réduction. Calculer son prix après la réduction.

Réponse : Effectuer une baisse de 30%, c'est multiplier par 1 – 30% = 0,7 car cela revient à ne garder que 70% de la somme initiale.

On obtient donc après réduction : 54 € × 0, 7 = 37, 80 €

2) Le commerçant utilise la feuille de calcul ci-dessous pour calculer les prix des articles soldés.

	A	B	C	D	E	F
1	prix avant réduction	12,00 €	14,80 €	33,00 €	44,20 €	85,50 €
2	réduction de 30%	3,60 €	4,44 €	9,90 €	13,26 €	25,65 €
3	prix soldé					

a) Pour calculer la réduction, quelle formule a-t-il pu saisir dans la cellule B2 avant de l'étirer sur la ligne 2 ?

Réponse : Pour calculer la réduction, la formule qu'il a pu saisir dans la cellule B2 avant de l'étirer sur la ligne 2 est : = B1* 0, 3

b) Pour obtenir le prix soldé, quelle formule peut-il saisir dans la cellule B3 avant de l'étirer sur la ligne 3 ?

Réponse : = B1 – B2 ou = B1 * 0,7

3) Le prix soldé d'un article est 42,00 €. Quel était son prix initial ?

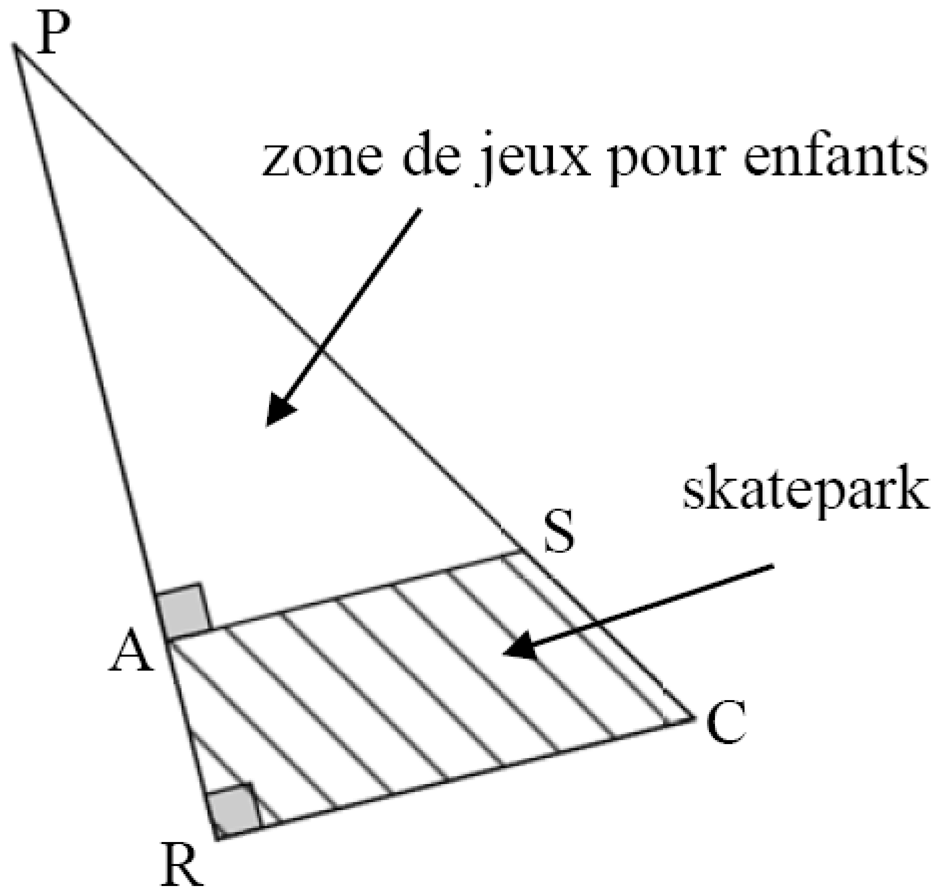
Réponse : Effectuer une baisse de 30%, c'est multiplier par $1-30\% = 0{,}7$, en notant P le prix avant réduction on obtient donc l'équation :

$$p \times 0{,}7 = 42\text{ €} \Leftrightarrow P = \frac{42}{0{,}7} = 60\text{ €}$$

Le prix initial était de 60 €

EXERCICE 5 : 5,5 points

La figure PRC ci-contre représente un terrain appartenant à une commune.



Les points P, A et R sont alignés.

Les points P, S et C sont alignés.

Il est prévu d'aménager sur ce terrain :

une « zone de jeux pour enfants » sur la partie PAS ;

un « skatepark » sur la partie RASC.

On connaît les dimensions suivantes :

PA = 30 m ; AR = 10 m ; AS = 18 m.

1) La commune souhaite semer du gazon sur la « zone de jeux pour enfants ». Elle décide d'acheter des sacs de 5 kg de mélange de graines pour gazon à 13,90 € l'unité. Chaque sac permet de couvrir une surface d'environ 140 m².

Quel budget doit prévoir cette commune pour pouvoir semer du gazon sur la totalité de la « zone de jeux pour enfants » ?

Réponse :

La zone pour enfants est le triangle PAS rectangle en A, donc son aire est :

$$\mathcal{A}_{PAS} = \frac{AP \times AS}{2} = \frac{30 \times 18}{2} = 270\ m^2$$

Chaque sac permet de couvrir une surface d'environ 140 m^2. Par division euclidienne on obtient : $270 = 140 \times 1 + 130$

Il convient donc d'acheter **deux sacs**, qui permettent de couvrir environ 280 m^2.

2) Calculer l'aire du « skatepark ».

Réponse : L'aire du skatepark peut s'obtenir, soit en effectuant la différence entre l'aire du triangle rectangle PRC avec celle du triangle PAS calculée lors de la question (1.), soit en utilisant la formule de l'aire d'un trapèze. Dans les deux cas, il nous manque RC.

Calculons RC.

Les droites (AS) et (RC) sont perpendiculaires à la droite (PR), elles sont donc parallèles entre elles.

– Données : ❑ Les points P, A, R et P, S, C sont alignés sur deux droites sécantes en P;

❑ Les droites (AS) et (RC) sont parallèles.

– Donc d'après le théorème de Thalès on a :

$$\frac{PA}{PR} = \frac{PS}{PC} = \frac{AS}{RC}$$

$$\frac{30}{30 + 10} = \frac{PS}{PC} = \frac{18}{RC}$$

$$\frac{30}{40} = \frac{18}{RC} \Leftrightarrow RC = \frac{40 \times 18}{30} = 24\ m$$

Méthode 1.

On a alors l'aire du triangle rectangle PRC :

$$\mathcal{A}_{PRC} = \frac{PR \times PC}{2} = \frac{40 \times 24}{2} = 480\ m^2$$

L'aire du shatepark est :

$$\mathcal{A}_{ASCR} = \mathcal{A}_{PRC} - \mathcal{A}_{PAS} = 480 - 270 = 210\ m^2$$

Méthode 2.

Si on connaissait la formule donnant l'aire d'un trapèze rectangle on obtenait alors directement :

$$\mathcal{A}_{ASCR} = hauteur\ \times \frac{petite\ base + grande}{2}$$

$$\mathcal{A}_{ASCR} = AR\ \times \frac{AS + RC}{2} = 10 \times \frac{18 + 24}{2} = 210\ m^2$$

EXERCICE 6 : 7 points

Avec des ficelles de 20 cm, on construit des polygones comme ci-dessous :

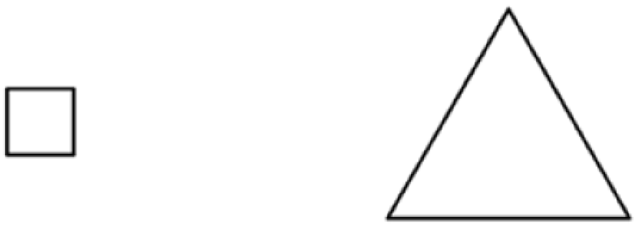
Étape 1

On coupe la ficelle de 20 cm en deux morceaux.

Étape 2

On sépare les deux morceaux.

Étape 3



Avec le « morceau nº 1 », on construit un carré.

Avec le « morceau nº 2 », on construit un triangle équilatéral

Partie 1 :

Dans cette partie, on découpe à l'étape 1 une ficelle pour que le « morceau nº 1 » mesure 8 cm.

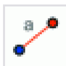
1) Dessiner en grandeur réelle les deux polygones obtenus.

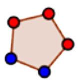
Le « morceau n° 1 » mesure 8 cm donc le carré formé est de côté $8 \div 4 = 2$ cm.

Le triangle équilatéral est formé avec la ficelle restante soit avec $20 - 8 = 12$ cm. Il sera donc de côté $12 \div 3 = 4$ cm.

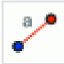
[Fichier GeoGebra]

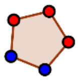
Pour le carré :

Avec l'outil « Segment de longueur donnée »  tracer un segment [AB] de 2 cm.

Avec l'outil « Polygone régulier »  cliquer sur A, puis sur B et entrer 4 dans la fenêtre qui s'ouvre (nombre de côtés). Les 2 autres sommets C et D, sont créés.

Pour le triangle équilatéral :

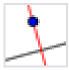
Avec l’outil « Segment de longueur donnée »  tracer un segment [EF] de 4 cm.

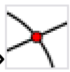
Avec l’outil « Polygone régulier »  cliquer sur E, puis sur F et entrer 3 dans la fenêtre qui s’ouvre (nombre de côtés). Le troisième sommet G est créé.

2) Calculer l’aire du carré obtenu.

Réponse : $\mathcal{A}_{carré} = 2^2 = 4\ cm^2$

3) Estimer l’aire du triangle équilatéral obtenu en mesurant sur le dessin.

Réponse : Traçons la hauteur GH : avec l’outil « perpendiculaire »  cliquer sur le point G puis sur le segment [EF].

Avec l’outil « Intersection »  placer le point H, intersection de la perpendiculaire à [EF] passant par G.

Avec l’outil « Distance ou longueur » 

mesurer la distance GH.

GH = 3,46 cm

On peut donc estimer l'aire du triangle équilatéral avec la formule :

$$\mathcal{A}_{triangle} = \frac{base \times hauteur\ associée}{2}$$

$$\mathcal{A}_{triangle} = \frac{4 \times h}{2} \approx \frac{4 \times 3{,}46}{2} = 6{,}92\ cm^2$$

Partie 2 :

Dans cette partie, on cherche maintenant à étudier l'aire des deux polygones obtenus à l'étape 3 en fonction de la longueur du « morceau nº 1 ».

1) Proposer une formule qui permet de calculer l'aire du carré en fonction de la longueur du « morceau nº 1 ».

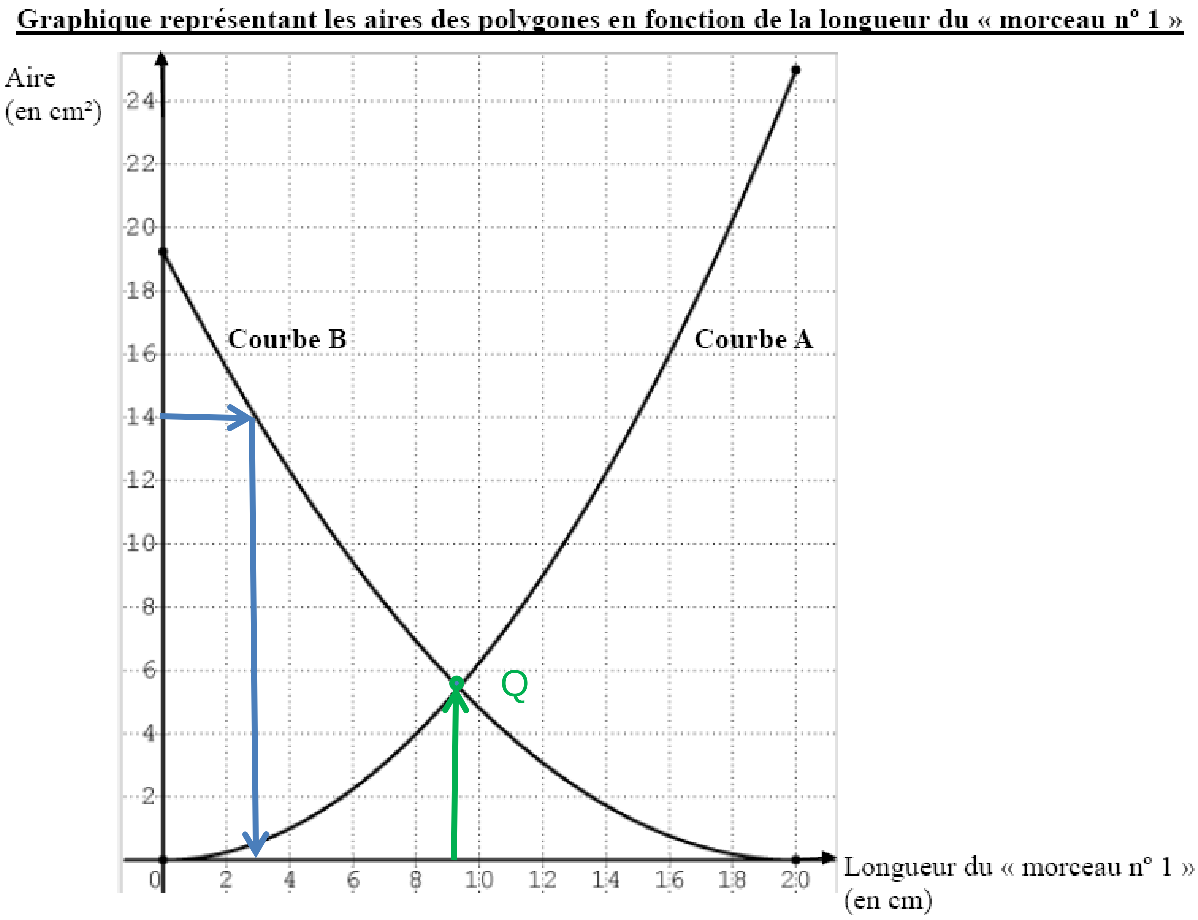
Réponse : En notant L la longueur du « morceau n°1 », le carré est de côté L ÷ 4 et donc son aire est :

$$\mathcal{A} = \left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{L^2}{16}$$

2) Sur le graphique ci-dessous :

la courbe A représente la fonction qui donne l'aire du carré en fonction de la longueur du « morceau nº 1 » ;

la courbe B représente la fonction qui donne l'aire du triangle équilatéral en fonction de la longueur du « morceau nº 1 ».



En utilisant ce graphique, répondre aux questions suivantes. Aucune justification n'est attendue.

a) Quelle est la longueur du « morceau nº 1 » qui permet d'obtenir un triangle équilatéral d'aire 14 cm² ?

Réponse : La longueur du « morceau n° 1 » qui permet d'obtenir un triangle équilatéral d'aire 14 cm^2 est d'environ 3 cm.

Il suffit pour cela de lire l'unique antécédent de 14 par la fonction associée à la courbe B.

En bleu sur le graphique, on lit l'abscisse $x_T \approx 3$ du point T de la courbe B, d'ordonnée 14.

b) Quelle est la longueur du « morceau nº 1 » qui permet d'obtenir deux polygones d'aires égales ?

Réponse : La longueur du « morceau n°1 » qui permet d'obtenir deux polygones d'aires égales correspond à l'abscisse du point d'intersection

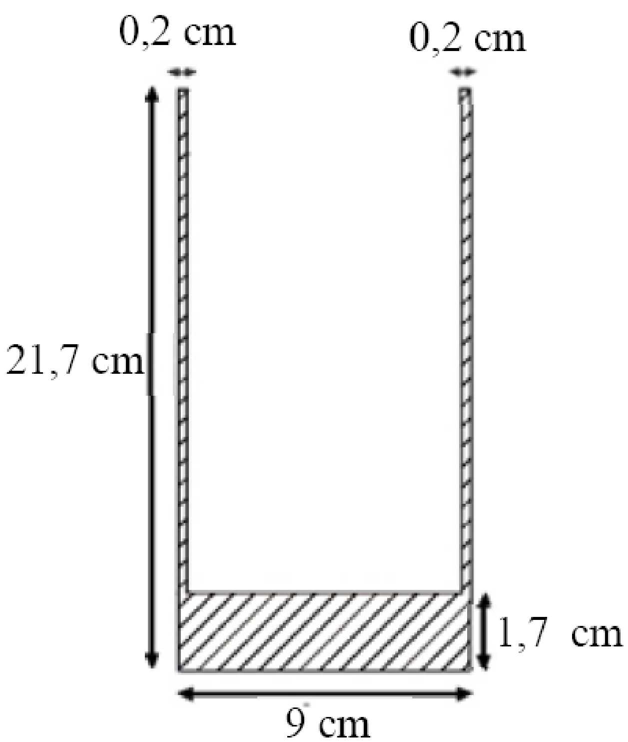
Q (en vert) des deux courbes soit $x_Q \approx 9,4$ cm.

EXERCICE 7 : 5 points

Antoine crée des objets de décoration avec des vases, des billes et de l'eau colorée.

Pour sa nouvelle création, il décide d'utiliser le vase et les billes ayant les caractéristiques suivantes :

Caractéristiques du vase



Matière : verre

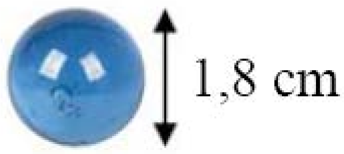
Forme : pavé droit

Dimensions extérieures : 9 cm × 9 cm × 21,7 cm

Épaisseur des bords : 0,2 cm

Épaisseur du fond : 1,7 cm

Caractéristiques des billes



Matière : verre

Forme : boule

Dimensions : 1,8 cm de diamètre

Il met 150 billes dans le vase. Peut-il ajouter un litre d'eau colorée sans risquer le débordement ?

On rappelle que de la boule est donné le volume par la formule :

$$\frac{4}{3} \times \pi \times rayon^3$$

Réponse :

Volume du Vase.

– Le fond du vase mesurant 1,7 cm, sa hauteur est de

$$h = 21,7 - 1,7 = 20\ cm$$

– L'épaisseur est de 0,2 cm donc la base est un carré de côté :

$$c = 9 - 0,2 \times 2 = 9 - 0,4 = 8,6\ cm$$

– Le vase est donc un pavé droit de dimensions

c × c × h donc son volume est :

$$V_1 = 20 \times 8,6 \times 8,6 = 1\,479,2\ cm^2$$

Volume de la boule

La boule est de diamètre 1,8 cm donc de rayon 0,9 cm. Son volume est alors :

$$V_2 = \frac{4}{3} \times \pi \times 0{,}9^3$$

Le volume des 150 billes est donc de :

$$V_3 = 150 \times V_2 = 150 \times \frac{4}{3} \times \pi \times 0{,}9^3 = 145{,}8\pi \approx 458{,}044\ cm^3$$

Conclusion.

Le volume restant dans le vase après y avoir introduit les 150 billes est donc :

$$V_4 = V_1 - V_3 \approx 1021{,}156\ cm^3 > 1000\ cm^3$$

Il peut donc ajouter 1 L d’eau colorée sans risquer le débordement.