Brevet des collèges Asie 27 juin 2016

EXERCISE 1 : 4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM).

Pour chaque ligne trois réponses sont proposées, mais une seule est exacte.

Toute réponse exacte vaut 1 point.

Toute réponse inexacte ou toute absence de réponse n'enlève pas de point.

Indiquez sur votre copie le numéro de la question et, sans justifier, recopier la réponse exacte (A ou B ou C).

Question 1 : Dans une urne, il y a 10 boules rouges et 20 boules noires. La probabilité de tirer une boule rouge est :

A : $\frac{1}{2}$ B : $\frac{1}{3}$ C : $\frac{2}{3}$

Réponse : B

Il y a 10 boules rouges pour un total de 30 boules (10 + 20) donc la probabilité de tirer un boule rouge parmi les 30 boules est :

$$p = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

Question 2 : $(3x + 2)^2 = \cdots$

A : $9x^2 + 4$ B : $3x^2 + 6x + 4$ C : $4 + 3x(3x + 4)$

Réponse : **C**

La première identité remarquable dit que :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$Avec\ a = 3x\ et\ b = 2\ on\ a :$

$(3x + 2)^2 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 2 + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4$

Si l'on développe la réponse C :

$4 + 3x(3x + 4) = 4 + 9x^2 + 12x = 9x^2 + 12x + 4$

Question 3 : Une solution de l'équation $x^2 - 2x - 8 = 0$ est :

A : 0 B : 3 C : 4

Réponse : **C**

Pour $x = 0$

$$x^2 - 2x - 8 = -8 \neq 0$$

Pour $x = 3$

$$x^2 - 2x - 8 = 3^2 - 2 \times 3 - 8 = 9 - 6 - 8 = -5 \neq 0$$

Pour $x = 4$

$$x^2 - 2x - 8 = -8 = 4^2 - 2 \times 4 - 8 = 16 - 8 - 8 = 0$$

Question 4 : Si on double toutes les dimensions d'un aquarium, alors son volume est multi- plié par :

A : 2 B : 6 C : 8

Réponse : **C**

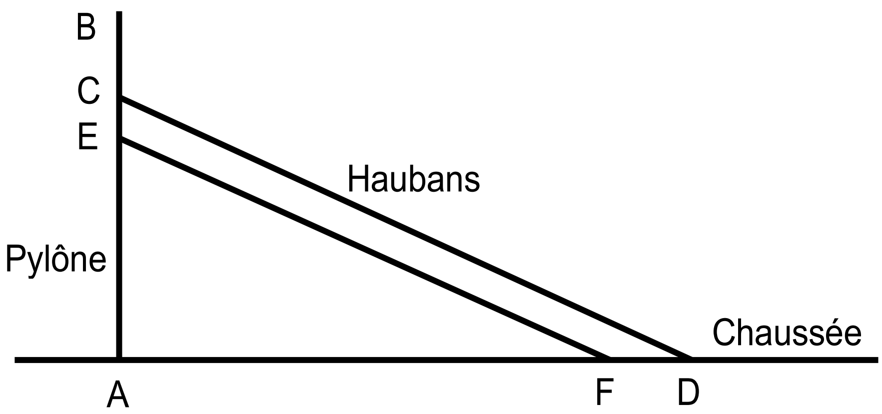
Par propriété, si on multiplie les dimensions d'un solide par un nombre positif k, son volume est multiplié par k^3 donc ici par $2^3 = 8$

Exercice 2 : 6 points

Le viaduc de Millau est un pont franchissant la vallée du Tarn, dans le département de l'Aveyron, en France.

Il est constitué de 7 pylônes verticaux équipés chacun de 22 câbles appelés haubans.

Le schéma ci-dessous, qui n'est pas à l'échelle, représente un pylône et deux de ses haubans.



On dispose des informations suivantes :

AB = 89 m ; AC = 76 m ; AD = 154 m ; FD = 12 m et EC = 5 m.

1. Calculer la longueur du hauban [CD]. Arrondir au mètre près.

Réponse :

Dans le triangle ACD rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore on a :

$$CD^2 = AC^2 + AD^2$$

$$CD^2 = 76^2 + 154^2$$

$$CD^2 = 5776 + 23716$$

$$CD^2 = 29492$$

Or CD est positif puisque c'est une longueur, l'unique solution possible est donc :

$$CD = \sqrt{29492} \approx 172\ m$$

2. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{CDA}$ formé par le hauban [CD] et la chaussée. Arrondir au degré près.

Réponse : Le triangle CDA est rectangle en A donc en utilisant la tangente, ce qui évite d'introduire une valeur approchée de la longueur

CD calculée lors de la question (1.) on a :

$$\tan \widehat{CDA} = \frac{AC}{AD} = \frac{76}{154}$$

$$\widehat{CDA} = \arctan\left(\frac{76}{154}\right) \approx 26°$$

3. Les haubans [CD] et [EF] sont-ils parallèles ?

Réponse : Tout d'abord notons que puisque le point E appartient au segment [AC] et le point F au segment [AD] on a :

AE = AC − EC = 76 − 5 = 71 m

AF = AD − FD = 154 − 12 = 142 m

Les points A, E, C et A, F, D sont alignés dans cet ordre sur deux droites sécantes en A.

Calculons :

$$\frac{AE}{AC} = \frac{71}{76}$$

$$\frac{AF}{AD} = \frac{142}{154} = \frac{71}{77}$$

$$\frac{AE}{AC} \neq \frac{AF}{AD}$$

D'après la contraposée du théorème de Thalès, les droites (CD) et (EF) ne sont pas parallèles.

EXERCICE 3 : 6 points

Une entreprise de fabrication de bonbons souhaite vérifier la qualité de sa nouvelle machine de conditionnement.

Cette machine est configurée pour emballer environ 60 bonbons par paquet.

Pour vérifier sa bonne configuration, on a étudié 500 paquets à la sortie de cette machine.

Document 1 : Résultats de l'étude

Nombre de bonbons	56	57	58	59	60	61	62	63	64
Effectifs	4	36	53	79	145	82	56	38	7

Document 2 : Critères de qualité

Pour être validée par l'entreprise, la machine doit respecter trois critères de qualité :

Le nombre moyen de bonbons dans un paquet doit être compris entre 59,9 et 60,1.

L'étendue de la série doit être inférieure ou égale à 10.

L'écart interquartile (c'est-à-dire la différence entre le troisième quartile et le premier quartile) doit être inférieur ou égal à 3.

La nouvelle machine respecte-t-elle les critères de qualité ?

Il est rappelé que, pour l'ensemble du sujet, les réponses doivent être justifiées.

Réponse :

<u>Critère de qualité n◦1</u> : nombre moyen de bonbons.

Le nombre moyen de bonbons est :

$$m = \frac{56 \times 4 + 57 \times 36 + \cdots + 63 \times 38 + 64 \times 7}{500} = \frac{30027}{500}$$

$$m \approx 60,05 \in [59,9 ; 60,1]$$

Le nombre moyen de bonbons dans un paquet est bien compris entre 59,9 et 60,1 donc le premier critère de qualité est validé.

<u>Critère de qualité n◦2</u> : étendue .

L'étendue e d'une série statistique est la différence entre sa plus grande et sa plus petite valeur soit ici :

$$e = 64 - 56 = 8 \leq 10$$

L'étendue est inférieure ou égale à 10 donc le deuxième critère de qualité est validé.

Critère de qualité n◦3 : écart interquartile .

– Il y a 500 valeurs donc le rang correspondant au premier quartile est :

$$500 \div 4 = 125$$

Le premier quartile est donc la 125ième valeur soit :

$$Q1 = 59$$

– Il y a 500 valeurs donc le rang correspondant au troisième quartile est :

$$3 \times 500 \div 4 = 3 \times 125 = 375$$

Le troisième quartile est donc la 375 ième valeur soit :

$$Q3 = 61$$

– l'écart interquartile est donc inférieur ou égal à 3 ce qui induit que le critère n◦3 soit aussi validé :

$$Q3 - Q1 = 61 - 59 = 2 \leq 3$$

Conclusion : la machine respecte bien les 3 critères de qualité.

EXERCICE 4 : 5 points

Adèle et Mathéo souhaitent participer au marathon de Paris.

Après s’être entraînés pendant des mois, ils souhaitent évaluer leur état de forme avant de s’engager.

Pour cela, ils ont réalisé un test dit « de Cooper » : l’objectif est de courir, sur une piste d’athlétisme, la plus grande distance possible en 12 minutes.

La distance parcourue détermine la forme physique de la personne.

Document 1 : Indice de forme selon le test de Cooper

L’indice de forme d’un sportif dépend du sexe, de l’âge et de la distance parcourue pendant les 12 min.

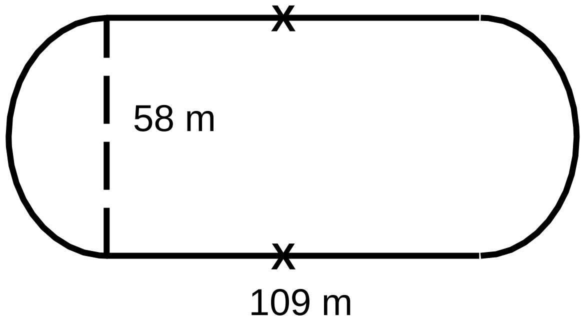
Pour les hommes

Indice de Forme	Moins de 30 ans	De 30 à 39 ans	De 40 à 49 ans	Plus de 50 ans
Très faible	moins de 1 600 m	moins de 1 500 m	moins de 1 350 m	moins de 1 250 m
Faible	1 601 à 2 000 m	1 501 à 1 850 m	1 351 à 1 700 m	1 251 à 1 600 m
Moyen	2 001 à 2 400 m	1 851 à 2 250 m	1 701 à 2 100 m	1 601 à 2 000 m
Bon	2 401 à 2 800 m	2 251 à 2 650 m	2 101 à 2 500 m	2 001 à 2 400 m

Très bon	plus de 2 800 m	plus de 2 650 m	plus de 2 500 m	plus de 2 400 m

Pour les femmes

Indice de Forme	Moins de 30 ans	De 30 à 39 ans	De 40 à 49 ans	Plus de 50 ans
Très faible	moins de 1500 m	moins de 1350 m	moins de 1200 m	moins de 1100 m
Faible	1501 à 1850 m	1351 à 1700 m	1201 à 1500 m	1101 à 1350 m
Moyen	1851 à 2 150 m	1 701 à 2 000 m	1 501 à 1 850 m	1 351 à 1 700 m
Bon	2 151 à 2 650 m	2 001 à 2 500 m	1 851 à 2 350 m	1 701 à 2 200 m
Très bon	plus de 2 650 m	plus de 2 500 m	plus de 2 350 m	plus de 2 200 m



Document 2 : Plan de la piste

Cette piste est composée de deux parties rectilignes et de deux demi-cercles.

Document 3 : Données du test

Adèle a 31 ans.

Mathéo a 27 ans.

Adèle a réalisé 6 tours de piste et 150 mètres.

Mathéo a réalisé le test avec une vitesse moyenne de 13,5 km/h.

1. Vérifier que la longueur de la piste est d'environ 400 mètres.

Réponse :

La piste est composé de deux segments de longueur 109 m et de deux demi-cercle (donc d'un cercle entier) de diamètre 58 m.

La longueur totale de la piste est alors :

$$\ell = 2 \times 109 + \pi \times 58 = 218 + 58\pi \approx 400,21\ m$$

2. Adèle et Mathéo ont décidé de participer au marathon uniquement si leur indice de forme est au moins au niveau « moyen ».

Déterminer si Adèle et Mathéo participeront à la course.

Réponse :

- Adèle a 31 ans et a réalisé 6 tours de pistes et 150 m.

Elle a donc parcourue en 12 minutes la distance de :

$$d_1 \approx 6 \times 400\,m + 150\,m \approx 2\,550\,m$$

D'après le tableau « femme », son indice de forme est donc « Très bon » (de ce fait au moins moyen), elle peut participer au marathon.

- Mathéo a lui 27 ans et a réalisé le test (courir 12 minutes) à la vitesse moyenne de 13,5 km/h.

: 60

Distance parcourue (km)	13,5	2,7
Temps (min)	60	12

$$d_2 = \frac{12 \times 13{,}5}{60} = 2{,}7km = 2700\,m$$

D'après le tableau « Homme » son indice de forme est donc « Bon ». Il peut participer au marathon.

EXERCICE 5 : 6 points

On considère les fonctions f et g définies par :

$$f\ (x) = 2x + 1 \ et \ g\ (x) = x^2 + 4x - 5$$

Léa souhaite étudier les fonctions f et g à l'aide d'un tableur. Elle a donc rempli les formules qu'elle a ensuite étirées pour obtenir le calcul de toutes les valeurs.

Voici une capture d'écran de son travail :

B3		=B1*B1+4*B1−5						
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	−3	−2	−1	0	1	2	3
2	$f\,(x)$	−5	−3	−1	1	3	5	7
3	$g\,(x)$	−8		−8	−5	0	7	16
4								

1. Quelle est l'image de 3 par la fonction f ?

Réponse :

L'image de 3 par f est : $f(3) = 2 \times 3 + 1 = 7$

2. Calculer le nombre qui doit apparaître dans la cellule C3.

Réponse :

Le nombre qui doit apparaitre dans la cellule C3 est l'image de -2 par g soit :

$$g(-2) = (-2)^2 + 4 \times (-2) - 5 = 4 - 8 - 5 \Longrightarrow g(-2) = -9$$

3. Quelle formule Léa a-t-elle saisie dans la cellule B2 ?

Réponse :

La formule que Léa a saisie dans la cellule B2 est : = 2 $*$ B1 + 1

4. À l'aide de la copie d'écran et sans justifier, donner une solution de l'inéquation : $2x + 1 < x^2 + 4x - 5$

Réponse :

Une solution de l'inéquation : $2x + 1 < x2 + 4x - 5$ est :

$$x = 2 \; ou \; x = 3$$

En effet on a :

$$f(2) = 5 < g(2) = 7 \; et \; f(3) = 7 < g(3) = 16$$

5. Déterminer un antécédent de 1 par la fonction f.

Réponse :

Un antécédent de 1 par f est $x = 0$ car $f(0) = 1$.

EXERCICE 6 3 points

Dans chaque cas, dire si l'affirmation est vraie ou fausse. Justifier votre réponse.

Affirmation 1 : Deux nombres impairs sont toujours premiers entre eux.

Réponse : fausse

Les entiers impairs 3 et 9 ne sont pas premiers entre eux puisque leur PGCD vaut 3.

Affirmation 2 :

Pour tout nombre entier positif a et b, $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$

Réponse : fausse

En prenant $a = b = 1$

$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2$

$\sqrt{(a+b)} = \sqrt{(1+1)} = \sqrt{2}$

$2 \neq \sqrt{2}$

Affirmation 3 :

Si on augmente le prix d'un article de 20 % puis de 30 % alors, au total, le prix a augmenté de 56 %.

Réponse : Vraie

Augmenter de x% c'est multiplier par (1 + x%)

Donc augmenter de 20% puis de 30%, c'est multiplier le prix initial par : $(1+20\%) \times (1+30\%) = 1,56 = 1 + 0,56 = 1 + 56\%$

Ce qui revient à une augmentation de 56%

Exercice 7 : 6 points

Romane souhaite préparer un cocktail pour son anniversaire.

Document 1 : Recette du cocktail Ingrédients pour 6 personnes :

60 cl de jus de mangue

30 cl de jus de poire

12 cl de jus de citron vert

12 cl de sirop de cassis

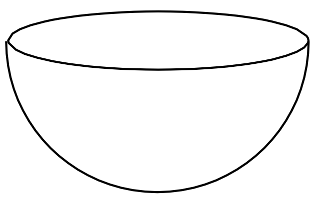
Préparation :

Verser les différents ingrédients dans un récipient et remuer.

Garder au frais pendant au moins 4 h.

Document 2 : Récipient de Romane

On considère qu'il a la forme d'une demi-sphère de diamètre 26 cm.



Rappels :

- Volume d'une sphère :

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

- 1 L = 1 dm3 = 1 000 cm3

Le récipient choisi par Romane est-il assez grand pour préparer le cocktail pour 20 personnes ?

Il est rappelé que, pour l'ensemble du sujet, les réponses doivent être justifiées.

Il est rappelé que toute trace de recherche sera prise en compte dans la correction.

Réponse :

Nombre de personnes	6	20
Jus de mangue (cl)	60	200

X 10

Nombre de personnes	6	20
Jus de poire (cl)	30	100

X 5

Nombre de personnes	6	20
Jus de poire (cl)	12	40

X 2

Nombre de personnes	6	20
Sirop de cassis (cl)	12	40

X 2

Volume des ingrédients :

Pour 20 personnes, il faudra au total 200 cl de jus de mangue, 100 cl de jus de poire, 40 cl de jus de citron et de cassis.

$$c = 200 + 100 + 40 + 40 = 380\ cl = 3{,}8L$$

Volume du récipient :

Le volume d'une demi-sphère de rayon r= 13 cm est :

$$V = \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \frac{2}{3} \times \pi \times 13^3 \approx 4601{,}386 cm^3$$

$$1\ L = 1000\ cm^3$$

$$V \approx 4{,}6\ L > c = 3{,}8\ L$$

Le récipient choisi par Romane est assez grand pour préparer le cocktail pour 20 personnes.